الرياضيــات

وتطبيقاتها الاقتصادية والتجارية

محتويات الكتاب

صفحة

الباب الأول

المعــادلات

Equations

الباب الأول

المعـادلات

Equations

المعادلـة equation هـى عبـارة عـن تقريـر يعبـر عـن تسـاوى مقدارين جبريين. والمعادلـة قد تحتـوى علـى متغير واحد one variable أو مجهـول واحد an unknown وتسمى فى هذه الحالـة معادلـة فـى متغير واحد، وقد تحتـوى علـى متغيـرين (مجهـولين) فتسـمى معادلـة فـى متغيـرين. ومـن ناحيـة أخرى، يمكن تقسيم المعـادلات حسب قوى المتغير الذى تحتويه إلى معـادلات من الدرجة الأولى، ومعادلات من الدرجة الثانيـة، ومعادلات من الدرجـة الثالثة ... وهكذا.

وللمعـادلات أهميـة كبيـرة فـى صـياغة الكثيـر مـن النمـاذج الاقتصـادية ومشاكل الإنتـاج والبيـع والتسويق ومن ثم تقديم الحلـول المناسبة لهذه النمـاذج. ولـذلك سـوف نتنـاول فـى هـذا البـاب المعـادلات الخطيـة والمعـادلات التربيعيـة، والمعادلات التكعيبية وطرق حل كل منها.

١-١ معادلات الدرجة الأولى : First Degree Equations

يتميـز هـذا النـوع مـن المعـادلات بـأن قوة المتغيـر power هـى الوحـدة. وتعرف معادلات الدرجة الأولى بالمعادلات الخطيـة linear equations لأنـها تمثل بيانياً بخط مستقيم. وقد تحتوى معادلـة الدرجـة الأولـى علـى متغيـر واحد فتسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد، ومثال ذلك :

$$٢ س + ٣ = صفر$$

وقد تحتوى على متغيرين، فتسمى فى هذه الحالة معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين، ومثال ذلك :

$$٣ س + ٢ ص = ٥$$

أو تحتوى على ثلاثة متغيرات فتسمى معادلة من الدرجة الأولى فى ثلاثة متغيرات مثل :

$$٥ س + ٣ ص - ع = صفر$$

وهكذا حتى نصل إلى معادلة من الدرجة الأولى فى ن متغير مثل :

$$أ_{١} س_{١} + أ_{٢} س_{٢} + ... + أ_{ن} س_{ن} = صفر$$

وفى هذا الباب ، سوف نستخدم الطرق البيانية والجبرية فى حل نظام من المعادلات الخطية حتى ثلاثة متغيرات ، أما تلك التى تحتوى على أكثر من ثلاثة متغيرات ، فإنه يمكن استخدام حزم الرياضة لحلها باستخدام الحاسب الآلى. علاوة على ذلك فإننا سوف نستخدم المصفوفات والمحددات فى حل المعادلات التى تحتوى على متغيرين أو أكثر وذلك فى الأبواب القادمة إن شاء الله.

حل معادلات الدرجة الأولى فى متغير واحد :

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد (أو مجهول واحد) تأخذ الشكل الآتى :-

$$\mathbf{أ س + ب = صفر}$$

حيث س : المتغير (المجهول) المطلوب إيجاد قيمته ،

أ ، ب : ثابتان ، $أ \neq صفر$

والحل العام لهذه المعادلة يأخذ الصورة :

$$\mathbf{س} = \frac{-ب}{أ}$$

مثال (١) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

٣ س – ٥ = ١

الحل :

حل المعادلة معناه إيجاد قيمة (س) التى تحقق المعادلة؛ أى قيمة (س) التى تجعل الطرف الأيمن للمعادلة يساوى الطرف الأيسر. نلاحظ أن هذه المعادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد هو (س). ولحلها نجعل الحد الذى يحتوى على المتغير (س) فى الطرف الأيمن من المعادلة، ونجعل المقادير الثابتة التى لا تحتوى على (س) فى الطرف الأيسر مع مراعاة تغيير إشارة الحد الذى ينقل من طرف إلى آخر. وعلى ذلك فإن :

٣ س – ٥ = ١

٣ س = ١ + ٥

٣ س = ٦

بقسمة طرفى المعادلة على ٣ نجد أن :

س = ٢

مجموعة الحل للمعادلة هى {٢}

وللتحقق من صحة الحل الذى حصلنا عليه، نقوم بالتعويض عن قيمة المتغير (س) بالقيمة (٢) فنجد أن :

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = واحد

مثال (٢) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : (س – ٣) = ٨ – س

الحل :

٤ (س – ٣) = ٨ – س

٤ س – ١٢ = ٨ – س

٤ س + س = ٨ + ١٢

٥ س = ٢٠

س = ٤

مجموعة الحل هى : {٤}

مثال (٣) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$$\frac{3\text{س}+7}{2} = \frac{1+\text{س}}{3}$$

الحل :

٣ (٣ س + ٧) = ٢ (١ + س)

٩ س + ٢١ = ٢ + ٢ س

٩ س − ٢ س = ٢ − ١٢

٧ س = −١٩

$$\text{س} = \frac{-19}{7}$$

مجموعة الحل هى : $\left\{\frac{-19}{7}\right\}$

مثال (٤) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية بالنسبة للمتغير س :

$$\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ع}}$$

الحل : $\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ع}}$

* بجعل الحد الذى يحتوى على المتغير س فى الطرف الأيمن وباقى الحدود فى الطرف الأيسر نحصل على :

$$\frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{\text{ص}}$$

$$\frac{1}{س} = \frac{ص - ع}{ع\,ص}$$

* وحيث أن : مقلوب الطرف الأيمن = مقلوب الطرف الأيسر

$$س = \frac{ع\,ص}{ص - ع}$$

مثال (٥) :

عمرمهند أكبر من عمر أخيه مهاب بأربع سنوات. ومنذ خمس سنوات كان عمرمهند ضعف عمرأخيه. أوجد عمر كلا منهما الآن.

الحل :

نفرض أن عمرمهاب الآن = س من السنوات

إذن عمر أخيه مهند = س + ٤ من السنوات

عمر مهاب منذ خمس سنوات = س – ٥

عمر مهند منذ خمس سنوات = س + ٤ – ٥

= س – ١

عمر مهند منذ خمس سنوات كان ضعف عمرأخيه مهاب

س – ١ = ٢ (س – ٥)

س – ١ = ٢ س – ١٠

س – ٢ س = –١٠ + ١

– س = –٩

س = ٩

أى أن

عمر مهاب الآن = ٩ سنة

عمر مهند الآن = ٩ + ٤ = ١٣ سنة

مثال (٦) :

اشترى تاجر مواشى ١٠٠٠ رأس من الماشية بسعر الوحدة ١٥٠ جنيه، ثم باع ٤٠٠ رأس بهامش ربح ٢٥%، ما هو سعر البيع الذى يبيع به المتبقى لديه من الماشية ليحقق ربحاً إجمالياً ٣٠% ؟

الحل :

ثمن الشراء الإجمالى = عدد الوحدات × سعر شراء الوحدة

= ١٠٠٠ × ١٥٠ = ١٥٠٠٠٠ جنيه

بالنسبة لـ ٤٠٠ وحدة :

ربح الوحدة = ١٥٠ × ٠,٢٥ = ٣٧,٥ جنيهاً

ربح ٤٠٠ وحدة = ٤٠٠ × ٣٧,٥ = ١٥٠٠٠ جنيهاً

بالنسبة لـ ٦٠٠ وحدة :

نفرض أن سعر بيع الوحدة = س

ربح الوحدة = سعر بيع الوحدة − سعر شراء الوحدة

= س − ١٥٠

ربح ٦٠٠ وحدة = ٦٠٠ (س − ١٥٠)

الربح الإجمالى = ربح ٤٠٠ وحدة + ربح ٦٠٠ وحدة

= ١٥٠٠٠ + ٦٠٠ (س − ١٥٠)

الربح الإجمالى يمثل ٣٠% من ثمن الشراء الإجمالى

١٥٠٠٠ + ٦٠٠ (س − ١٥٠) = ١٥٠٠٠٠ × ٠,٣٠

١٥٠٠٠ + ٦٠٠ س − ٩٠٠٠٠ = ٤٥٠٠٠

٦٠٠ س = ٤٥٠٠٠ + ٩٠٠٠٠ − ١٥٠٠٠

٦٠٠ س = ١٢٠٠٠٠

س = ٢٠٠ جنيه

مثال (٧) :

استثمر شخص مبلغاً من المال فى وعاء استثمارى يعطى عائداً بمعدل ١٠% فى السنة. ثم استثمر مبلغاً يزيد عن الأول بمقدار ٢٠٠٠ جنيه فى وعاء استثمارى آخر يعطى عائداً ٨% فى السنة. فإذا كان العائد الإجمالى الذى يحصل عليه هذا الشخص من كلا الوعائين يبلغ ٧٠٠ جنيه فى نهاية العام. ماهو المبلغ الذى يجب أن يستثمره الرجل فى كل وعاء على حدة ؟

الحل :

نفرض أن المبلغ الذى استثمره الشخص فى الوعاء الاستثمارى الأول = س

وبالتالى يكون المبلغ الذى استثمره فى الوعاء الثانى = س + ٢٠٠٠

العائد الإجمالى = العائد من الوعاء الأول + العائد من الوعاء الثانى

٧٠٠ = (س × ٠,١٠) + (س + ٢٠٠٠) × ٠,٠٨

٧٠٠ = ٠,١٠ س + ٠,٠٨ س + ١٦٠

٧٠٠ = ٠,١٨ س + ١٦٠

٠,١٨ س = ٧٠٠ − ١٦٠

٠,١٨ س = ٥٤٠

س = ٣٠٠٠ جنيه

أى أنه لكى يحصل هذا الشخص على عائد سنوى إجمالى قدره ٧٠٠ جنيه من كلا الوعائين عليه أن :

* يستثمر مبلغ ٣٠٠٠ جنيه فى الوعاء الذى يعطى ١٠% فى السنة.
* يستثمر مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى الوعاء الذى يعطى ٨% فى السنة.

مثال (٨) :

يبيع مصنع الكراسى الذهبية الوحدة بسعر ٢٠ جنيهاً فإذا كان الكرسى الواحد يكلف المصنع ١٢,٥ جنيهاً كتكلفة خامات وأيدى عاملة. وأن التكلفة الثابتة ٧٠٠٠ جنيه شهرياً لكى ينفذ خطته الإنتاجية. أوجد عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع ليحقق ربحاً قدره ٥٠٠٠ جنيه شهرياً.

الحل :

عدد الوحدات = س

سعر بيع الوحدة (ع) = ٢٠

التكلفة الكلية (ت) = ١٢,٥ س + ٧٠٠٠

ر = ى − ت

= س ع − ت

٥٠٠٠ = ٢٠ س − (١٢,٥ س + ٧٠٠٠)

٥٠٠٠ = ٢٠ س − ١٢,٥ س − ٧٠٠٠

٥٠٠٠ = ٢٠ س − ١٢,٥ س − ٧٠٠٠

٧,٥ س = ١٢٠٠٠

س = ١٦٠٠

إذن لكى يحقق مصنع الكراسى الذهبية ربحاً قدره ٥٠٠٠ جنيه يجب أن يبيع ١٦٠٠ كرسياً شهرياً.

حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين :

إذا افترضنا أن مصنع دينا ينتج نوعين من السلع هما السلعة (أ)، والسلعة (ب)، وأن ربح الوحدة من النوع الأول ٨ جنيهات وربح الوحدة من النوع الثانى ١٢ جنيهاً. وإذا فرض أن الربح الإجمالى فى أحد الأسابيع كان ٥٠٠ جنيهاً وأن عدد الوحدات المباعة من النوع (أ) هو (س) وحدة، وأن عدد الوحدات المباعة من النوع (ب) هو (ص) وحدة، فإنه يمكن صياغة هذه البيانات فى شكل علاقة رياضية كالآتى :-

٨ س + ١٢ ص = ٥٠٠

وهذه العلاقة الرياضية هى معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين أو مجهولين هما (س ، ص) ويمكن تمثيلها بيانياً بخط مستقيم. وبصفة عامة، فإن الشكل العام لمعادلة الدرجة الأولى فى متغيرين يأخذ الصورة :

أ س + ب ص + جـ = صفر

حيث : س ، ص متغيران فى المعادلة

أ ، ب ، جـ ثوابت ، أ ، ب $\neq$ صفر

مثال (٩) :

مثل المعادلة الآتية بيانياً :

٣ س + ٥ ص = ١٥

الحل :

لرسم الخط المستقيم الذى يمثل هذه المعادلة، نفترض أن س = صفر ونحصل على قيمة ص بالتعويض كالآتى :

٣ (صفر) + ٥ ص = ١٥

٥ ص = ١٥

ص = ٣

ثم نفرض أن ص = صفر ونحصل على قيمة س كالتالى :

٣ س + ٥ (صفر) = ١٥

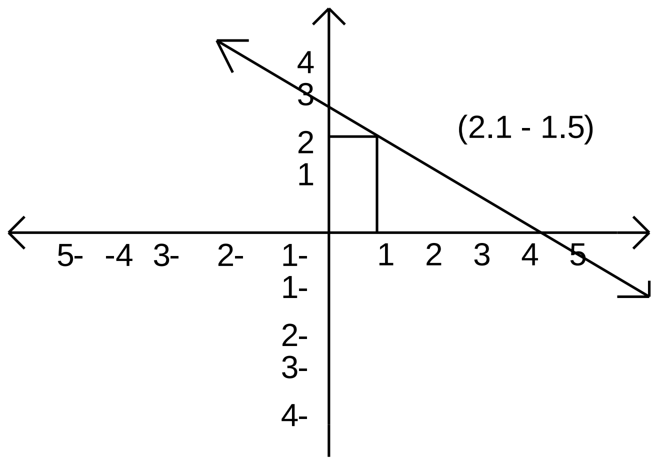
٣ س = ١٥

س = ٥

وعليه فإنه يمكن تلخيص هذه النتائج فى الجدول التالى :

س	صفر	٥
ص	٣	صفر

ولتمثيل ذلك بيانياً، نقوم برسم محورى الإحداثيات الأفقى والرأسى، ثم نقوم بتحديد هاتين النقطتين على المستوى ثم نصل بينهما بالقلم والمسطرة فنحصل على الخط المستقيم الممثل لهذه المعادلة كما هو موضح بالشكل التالى:



شكل رقم (١)

وللتحقق من صحة الحل نأخذ أى نقطة تقع على هذا الخط نجد أنها تحقق المعادلة. وعلى سبيل المثال إذا أخذنا النقطة (١,٥ ، ٢,١) نجد أنها تحقق معادلة الخط المستقيم حيث أن :

الطرف الأيمن = ٣ (١,٥) + ٥ (٢,١)

= ٤,٥ + ١٠,٥ = ١٥

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ١٥

وإذا كان لدينا معادلتان من الدرجة الأولى فى متغيرين فإنه يمكن حل هاتين المعادلتين آنياً بإحدى الطرق الثلاثة الآتية :

١- الطريقة البيانية.

٢- جبرياً باستخدام طريقة الحذف.

٣- جبرياً باستخدام طريقة التعويض.

والمثال الآتى يوضح كيفية حل هاتين المعادلتين بكل طريقة من الطرق الثلاثة سالفة الذكر كل على حدة.

مثال (١٠) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين آنياً بثلاث طرق :

٨ س + ٢ ص = ٤

٥ س + ٢ ص = ١

الحل :

١- **الطريقة البيانية :** تتمثل هذه الطريقة فى رسم كل معادلة من هاتين المعادلتين كل على حدة وذلك كما سبق فى مثال (٩). ثم نحدد نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لهاتين المعادلتين فتكون هذه النقطة هى الحل للنظام.

بالنسبة للمعادلة الأولى : ٨ س + ٢ ص = ٤

نضع س = صفر

٨ (صفر) + ٢ ص = ٤

٢ ص = ٤

ص = ٢

نضع ص = صفر

٨ س + ٢ (صفر) = ٤

٨ س = ٤

س = $\frac{1}{2}$

نضع النتائج فى جدول كالآتى :

س	صفر	٠,٥
ص	٢	صفر

بالنسبة للمعادلة الثانية : ٥ س + ٢ ص = ١

نضع س = صفر

٥ (صفر) + ٢ ص = ١

٢ ص = ١

ص = $\frac{1}{2}$

نضع ص = صفر

٥ س + ٢ (صفر) = ١

٥ س = ١

س = $\frac{1}{5}$

نضع النتائج فى جدول كالآتى :

س	صفر	٠,٢
ص	٠,٥	صفر

وباستخدام البيانات والنتائج بالجدولين السابقين نستطيع رسم الخط الممثل لكل معادلة كما هو موضح بالشكل التالى :

شكل رقم (٢)

ومن الشكل رقم (٢) نجد أن الخطين يتقاطعان فى النقطة (١، -٢).
وعليه فإن مجموعة الحل للمعادلتين هى {(١ ، -٢)}.

وللتحقق من صحة الحل يتم التعويض عن س = ١ ، ص = -٢ فى كل معادلة على حدة نجد أن النقطة (١،-٢) تحقق كلا المعادلتين كما يلى:

التحقيق :

المعادلة الأولى : ٨ س + ٢ ص = ٤

الطرف الأيمن = ٨ (١) + ٢ (-٢)

= ٨ - ٤ = ٤ = الطرف الأيسر

المعادلة الثانية : ٥ س + ٢ ص = ١

الطرف الأيمن = ٥ (١) + ٢ (-٢)

= ٥ - ٤ = ١ = الطرف الأيسر

٢- **طريقة الحذف :** تتلخص هذه الطريقة فى حذف متغير من المتغيرين وليكن المتغير (س) مثلا وذلك بتوحيد معاملات هذا المتغير فى المعادلتين، ثم بطرح المعادلتين نحصل على قيمة المتغير (ص)، ثم بعد ذلك نقوم بالتعويض فى إحدى المعادلتين عن قيمة المتغير (ص) فنحصل على قيمة المتغير (س) وذلك كالآتى :

٨ س + ٢ ص = ٤ (١)

٥ س + ٢ ص = ١ (٢)

نلاحظ أن معاملات المتغير (ص) متساوية فى المعادلتين، لذلك نقوم بطرح المعادلتين مباشرة وذلك بتغيير إشارة المعادلة الثانية

٨ س + ٢ ص = ٤

-٥س - ٢ ص = -١

٣ س = ٣

س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فى المعادلة الأولى نجد أن :

٨ (١) + ٢ ص = ٤

٨ + ٢ ص = ٤

٢ ص = ٤ - ٨

٢ ص = -٤

ص = -٢

مجموعة الحل هى : { (١ ، -٢) }

٣- **طريقة التعويض** : تتلخص هذه الطريقة فى إيجاد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر وذلك من إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة الأولى كالآتى:

٨ س + ٢ ص = ٤

٨ س = ٤ - ٢ ص

بقسمة طرفى المعادلة على (٨)

س $= \frac{4}{8} - \frac{2}{8}$ ص (٣)

بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (٢) نجد أن :

٥ س + ٢ ص = ١

٥ $\left(\frac{4}{8} - \frac{2}{8}\right.$ ص$\left.\right)$ + ٢ ص = ١

$\frac{20}{8} - \frac{10}{8}$ ص + ٢ ص = ١

بضرف طرفى المعادلة فى (٨)

٢٠ − ١٠ ص + ١٦ ص = ٨

٦ ص = ٨ − ٢٠

٦ ص = −١٢

ص = −٢

وبالتعويض عن قيمة ص = −٢ فى المعادلة (٣)

س = $\frac{4}{8}-\frac{2}{8}$ (−٢)

س = $\frac{4}{8}+\frac{4}{8}$

س = ١

مجموعة الحل هى { (١ ، −٢) }

ومن الملاحظ أن الطرق الثلاثة تعطى نفس الحل للمعادلتين وعلى الباحث اختيار الطريقة الملائمة التى تناسب المشكلة التى هو بصددها.

مثال (١١) :

يقوم مصنع رانا وسارة لماكينات الحياكة بإنتاج نوعين من هذه الماكينات حيث يحتاج النوع الأول إلى ٥ ساعات عمل فى قسم الإنتاج (أ)، ٤ ساعات فى قسم الإنتاج (ب)، ويحتاج النوع الثانى إلى ٣ ساعات عمل فى قسم الإنتاج (أ)، ساعتان فى قسم الإنتاج (ب). فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة فى الأسبوع بقسمى الإنتاج (أ)، (ب) هى ٨٦ ساعة، ٦٤ ساعة على الترتيب أحسب عدد الماكينات المنتجة من كل نوع أسبوعياً.

الحل :

يمكن تلخيص بيانات هذه المشكلة فى جدول كالآتى :

القسم / **نوع الماكينة**	**(أ)**	**(ب)**

الأول	٥	٤
الثانى	٣	٢
عدد الساعات المتاحة	٨٦	٦٤

بفرض أن عدد الماكينات المنتجة من النوع الأول = س

وأن عدد الماكينات المنتجة من النوع الثانى = ص

وبالتالى يمكن صياغة المشكلة فى نظام معادلات كالآتى :

٥ س + ٣ ص = ٨٦ (١)

٤ س + ٢ ص = ٦٤ (٢)

ولحل هاتين المعادلتين سوف نستخدم طريقة الحذف كالآتى :

نوحد معاملى المتغير (س) فى المعادلتين وذلك بضرب المعادلة (١) فى ٤ وضرب المعادلة (٢) فى ٥ وبطرح المعادلتين ينتج أن :

٢٠ س + ١٢ ص = ٣٤٤

-٢٠ س - ١٠ ص = -٣٢٠

٢ ص = ٢٤

ص = ١٢

بالتعويض فى المعادلة عن قيمة ص = ١٢ نحصل على :

٥ س + ٣ (١٢) = ٨٦

٥ س + ٣٦ = ٨٦

٥ س = ٨٦ - ٣٦

٥ س = ٥٠

س = ١٠

إذن مصنع رانا وسارة يمكنه إنتاج ١٠ ماكينات حياكة من النوع الأول، ١٢ ماكينة حياكة من النوع الثانى أسبوعياً وذلك فى ظل ساعات العمل المتاحة.

هذا وتجدر الإشارة هنا بأنه يمكننا حل نظام المعادلات السابق باستخدام طريقة التعويض أو بيانياً كما سبق شرحه.

حل معادلات الدرجة الأولى فى ثلاثة متغيرات :

إذا افترضنا أن أحد المصانع يقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من السلع وأن سعر بيع الوحدة من النوع الأول ١٥ جنيهاً، وسعر بيع الوحدة من النوع الثانى ٢٥ جنيهاً، سعر بيع الوحدة من النوع الثالث ٣٠ جنيهاً. وعلى فرض أن الإيراد الكلى المحقق خلال أسبوع هو ١٥٠٠ جنيه، فإننا نستطيع أن نكون علاقة رياضية لهذه البيانات إذا افترضنا أن عدد الوحدات المباعة من النوع الأول هو (س)، وعدد الوحدات المباعة من النوع الثانى هو (ص) أما بالنسبة للنوع الثالث فعدد الوحدات المباعة هو (ع) وبالتالى تكون العلاقة الرياضية على الصورة :

$$١٥ س + ٢٥ ص + ٣٠ ع = ١٥٠٠$$

وهى معادلة من الدرجة الأولى (معادلة خطية) فى ثلاث متغيرات، وقيم هذه المتغيرات يجب أن تحقق هذه المعادلة. ومن الجدير بالذكر أنه عند حل نظام المعادلات الخطية فى ثلاثة متغيرات فإنه طبقاً لنظرية المعادلات يجب توافر ثلاثة معادلات من نفس الدرجة فى تلك المتغيرات الثلاث.

مثال (١٢) :

حل نظام المعادلات الآتى :

$$٢ س - ص + ٥ ع = ١٥ \qquad (١)$$

$$س + ص + ع = ٦ \qquad (٢)$$

$$٣ س + ٥ ص - ٤ ع = ١ \qquad (٣)$$

الحل :

فـى هـذا المثـال، سـوف نسـتخدم طريقـة الحـذف لحـل هـذا النظـام مـن المعادلات، وتتلخص هذه الطريقة كما شرحنا سابقاً فى الخطوات الآتية :

١- نحـاول حـذف أحـد المتغيـرات مـن اثنتـين مـن المعـادلات فنحصـل علـى معادلة فى متغيرين :

٢ س − ص + ٥ ع = ١٥ ...... (١)
س + ص + ع = ٦ ...... (٢) بالجمع

٣ س + ٦ ع = ٢١ .... (٤)

٢- نحاول حذف نفس المتغير من معادلتين أخريين بشرط أن تكون إحداهما المعادلة التى لم نتناولها بعد، فنحصل على معادلة فى نفس المتغيرين :

س + ص + ع = ٦ (٢)
٣ س + ٥ ص + ٤ع = ١ (٣)

بضرب المعادلة (٢) فى ٥ وطرح المعادلتين ، فإن :

٥ س + ٥ ص + ٥ ع = ٣٠
-٣ س − ٥ ص + ع = −١

٢ س + ٩ ع = ٢٩ (٥)

٣- بحل المعادلتين (٤) ، (٥) بضرب المعادلة (٤) فى ٢ وضرب المعادلة (٥) فى ٣ وطرح المعادلتين :

٦ س + ١٢ ع = ٤٢
-٦ س − ٢٧ ع = −٨٧

-١٥ ع = −٤٥
ع = ٣

بالتعويض فى المعادلة (٤) عن قيمة س نحصل على :

٣ س + ٦ (٣) = ٢١

٣ س + ١٨ = ٢١

٣ س = ٢١ - ١٨

٣ س = ٣

س = ١

٤- نقوم بالتعويض عن قيمة هذين المتغيرين فى إحدى المعادلات الأصلية ولتكن المعادلة الأولى مثلا فنحصل على قيمة المتغير الثالث :

٢(١) - ص + ٥(٣) = ١٥

٢ - ص + ١٥ = ١٥

-ص = ١٥ - ١٥ - ٢

-ص = -٢

ص = ٢

س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

١-٢ معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد :

Second Degree Equations :

تأخذ معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد أو المعادلة التربيعية quadratic equation الصورة العامة :

أ س٢ + ب س + جـ = صفر

حيث : أ = معامل س٢ ، أ ≠ صفر

ب = معامل س

جـ = الحد المطلق

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بإحدى ثلاث طرق هى :

١- طريقة التحليل Factoring Method

٢- باستخدام القانون Quadratic Formula

٣- طريقة إكمال المربع Completing the Square

أولاً : حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل :

تعتمد هذه الطريقة على إلمام الطالب بطرق التحليل المختلفة والتى سبق له دراستها. والأمثلة التالية توضح لنا كيفية حل المعادلات التربيعية بالتحليل.

مثال (١٣) :

أوجد جذرى المعادلة :

س^٢ – ٦ س + ٥ = صفر

الحل :

بتحليل الطرف الأيمن كمقدار ثلاثى

(س – ٥) (س – ١) = صفر

إما س – ٥ = صفر	أو س – ١ = صفر
س = ٥	س = ١

جذر المعادلة هما ٥ ، ١

مثال (١٤) :

حل المعادلة التربيعية :

٣ (س^٢ + ١) = ٥ (١ – س)

الحل :

بفك الأقواس فى كلا الطرفين :

٣ س^٢ + ٣ = ٥ – ٥ س

بتجميع الحدود بالطرف الأيمن ووضعها فى الصورة العامة للمعادلة التربيعية

$$٣ س^٢ + ٥ س − ٢ = صفر$$

بتحليل الطرف الأيمن كمقدار ثلاثى :

$$(٣ س − ١)\ (س + ٢) = صفر$$

إما ٣ س − ١ = صفر

٣ س = ١

$$س = \frac{1}{3}$$

أو س + ٢ = صفر

س = −٢

مجموعة الحل للمعادلة هى : $\left\{\frac{1}{3} ، -2\right\}$

مثال (١٥) :

أوجد جذرى المعادلة :

$$(٢ س + ٣)\ (٣ س − ١) = −٤$$

الحل :

بفك الأقواس باستخدام الضرب بمجرد النظر ونقل الحدود إلى الطرف الأيمن مع وضع المعادلة فى الصورة العامة :

$$٦ س^٢ + ٧ س − ٣ = −٤$$

$$٦ س^٢ + ٧ س − ٣ + ٤ = صفر$$

$$٦ س^٢ + ٧ س + ١ = صفر$$

$$(٦ س + ١)\ (س + ١) = صفر$$

إما ٦ س + ١ = صفر

٦ س = −١

$$س = \frac{-1}{6}$$

أو س + ١ = صفر

س = −١

جذرا المعادلة هما $-\frac{1}{6}$ ، −١

ثانياً : حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون :

لاشتقاق القانون العام الذى يستخدم فى حل المعادلة التربيعية فى متغير واحد، دعنا نأخذ فى الاعتبار مرة أخرى، الصورة العامة للمعادلة التربيعية:

$$\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$$

* نقسم طرفى المعادلة على معامل $\text{س}^{٢}$ (أى نقسم على أ)

$$\text{س}^{2} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \text{صفر}$$

* ننقل الحد المطلق (جـ) إلى الطرف الأيسر مع تغيير إشارته

$$\text{س}^{2} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

* نضيف إلى كل طرف من طرفى المعادلة مربع نصف معامل س ، أى نضيف للطرفين : $\left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^{2}$

$$\text{س}^{2} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \frac{\text{ب}^{2}}{4\text{أ}^{2}} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{2}}{4\text{أ}^{2}}$$

* نأخذ الجذر التربيعى للحد الأول والجذر التربيعى للحد الثالث بالطرف الأيمن للمعادلة ونضع بينهما إشارة الحد الأوسط ونضعهما فى قوس مرفوع للقوة (٢)

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^{2} = \frac{-\,\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{2}}{4\text{أ}^{2}}$$

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^{2} = \frac{-4\text{أ}\,\text{جـ} + \text{ب}^{2}}{4\text{أ}^{2}}$$

* بأخذ الجذر التربيعى للطرفين نجد أن :

$$\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\frac{\sqrt{\text{ب}^{2} - 4\text{أ}\,\text{جـ}}}{2\text{أ}}$$

أى أن :

$$س = \frac{- ب}{2أ} \pm \frac{\sqrt{ب^2 - 4أ ج}}{2أ}$$

وبالتالى فإن :

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أ ج}}{2أ}$$

وهذه الصورة الأخيرة تعرف باسم الصورة التربيعية أو (القانون العام) وتستخدم فى حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد.

مثال (١٦) :

حل المعادلة الآتية باستخدام القانون :

٢ س٢ - س - ٢ = صفر

الحل :

أ = ٢ ، ب = -١ ، جـ = -٢

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أ ج}}{2أ}$$

$$س = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times -2}}{2 \times 2}$$

$$س = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$$

$$س = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

إما س $= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ أو س $= \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$

س = ١,٢٨١ | س = −٠,٧٨

مجموعة الحل هى { ١,٢٨١ ، −٠,٧٨ }

ثالثاً : حل المعادلة التربيعية بطريقة إكمال المربع :

تتمثل طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية فى الخطوات التى استخدمت لاشتقاق القانون العام الذى يستخدم فى حل هذه المعادلات والتى تم تناولها فى (ثانياً) والمثال التالى يوضح طريقة حل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع.

مثال (١٧) :

استخدم طريقة إكمال المربع لحل المعادلة التربيعية بالمثال (١٥)

٢ س^{٢} − س − ٢ = صفر

الحل :

خطوات الحل تتمثل فى الآتى :

* نقسم طرفى المعادلة على معامل س^{٢} (أى نقسم على ٢)

س^{٢} − $\frac{1}{2}$ س − ١ = صفر

* ننقل الحد المطلق إلى الطرف الأيسر مع تغيير إشارته

س^{٢} − $\frac{1}{2}$ س = ١

* نضيف لطرفى المعادلة مربع نصف معامل س (أى نضيف $\frac{1}{16}$)

س^{٢} − $\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{16}$ = ١ + $\frac{1}{16}$

* بأخذ الجذر التربيعى للحد الأول والحد الثالث ووضع إشارة الحد الأوسط بينهما فى قوس مرفوع للقوة ٢

$$\left(س - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

* بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$$س - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$س = \pm \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4}$$

إما $س = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4}$

س = ١,٢٨١

أو

$س = -\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4}$

س = −٠,٧٨

جذرا المعادلة هما : ١,٢٨١ ، −٠,٧٨

ومن الأمثلة السابقة نلاحظ أن المعادلة التربيعية لها حلان (جذران)، ومن الجدير بالذكر أيضاً أن المعادلة التربيعية قد يكون لها حل وقد لا يكون لها حل.

مميز المعادلة التربيعية : Discriminate

يستخدم مميز المعادلة التربيعية فى تحديد نوع جذرى المعادلة وما إذا كان للمعادلة حل أم لا.

والمميز = ب٢ − ٤ أجـ

١− إذا كانت قيمة المميز مقداراً موجباً، كان للمعادلة حل، وكان جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين فى القيمة.

٢− إذا كانت قيمة المميز تساوى صفرا، كان للمعادلة حل، وكان الجذران حقيقيين متساويين فى القيمة.

٣- إذا كانت قيمة المميز مقداراً سالباً، لا يكون للمعادلة حل لأن جذرى المعادلة تخيليان أى ليسا عددين حقيقيين.

مثال (١٨) :

حدد نوع جذرى المعادلة التربيعية الآتية دون حلها.

$$\frac{1}{3}\text{س}^2 - \frac{1}{2} = ٥\text{ س}$$

الحل :

نضع المعادلة فى الصورة العامة

$$\frac{1}{3}\text{س}^2 - ٥\text{ س} - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

$$\text{أ} = \frac{1}{3} \quad ، \quad \text{ب} = -٥ \quad ، \quad \text{جـ} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{المميز} = \text{ب}^٢ - ٤\text{ أ جـ}$$

$$= (-٥)^٢ - ٤ \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= ٢٥ + \frac{4}{6}$$

$$= \frac{77}{3} > \text{صفر}$$

إذن جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان.

مثال (١٩) :

أثبت أن المعادلة :

$\text{س}^٢ - ٢\text{ س} + ٧ = \text{صفر}$ ليس لها حل.

الحل :

$$\text{أ} = ١ \quad ، \quad \text{ب} = -٢ \quad ، \quad \text{جـ} = ٧$$

$$\text{المميز} = \text{ب}^٢ - ٤\text{ أجـ}$$

$$= (-٢)^٢ - ٤ (١) (٧)$$

= ٤ - ٢٨

= -٢٤ < صفر

جذرا المعادلة تخيليان والمعادلة ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (٢٠) :

جدد نوع جذرى المعادلة :

س٢ = -٩ - ٦ س

الحل :

نضع المعادلة فى الصورة العامة.

س٢ + ٦ س + ٩ = صفر

أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٩

المميز = ب٢ - ٤ أجـ

= (٦)٢ - ٤ (١) (٩)

= ٣٦ - ٣٦

= صفر

جذرا المعادلة حقيقيان متساويان.

تطبيقات تجارية على المعادلة التربيعية :

تستخدم المعادلة التربيعية فى حل الكثير من المشكلات الاقتصادية والتجارية والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (٢١) :

ينتج مصنع رانا ودينا للعب الأطفال (س) من الوحدات أسبوعياً، ويبيع الوحدة بسعر (ع) جنيها حيث (ع) تستنتج من العلاقة : س= ١٦٠ (١٠-ع). فإذا كانت تكلفة إنتاج (س) من الوحدات هى (٤ س + ٤٠٠) جنيها. كم وحدة ينتجها مصنع رانا ودينا أسبوعياً ليحقق ربحاً قدرة ١٠٠٠ جنيه ؟

الحل :

نفرض أن :

عدد الوحدات المنتجة   س

سعر بيع الوحدة   ع

الإيراد   ى

التكلفة   ت

الربح   ر

الإيراد = عدد الوحدات × سعر بيع الوحدة

ى = س × ع

الربح = الإيراد − التكاليف

ر = ى − ت

س = ١٦٠ (١٠ − ع)

س = ١٦٠٠ − ١٦٠ ع

١٦٠ ع = ١٦٠٠ − س

ع = ١٠ − $\frac{\text{س}}{160}$

الربح = الإيراد − التكلفة

= عدد الوحدات × سعر بيع الوحدة − التكلفة

١٠٠٠ = س $\left(10-\frac{\text{س}}{160}\right)$ − ٤ س − ٤٠٠

١٤٠٠ = ٦ س − $\frac{\text{س}^2}{160}$

بضرب طرفى المعادلة × ١٦٠ نحصل على :

٢٢٤٠٠٠ = ٩٦٠ س − س^{٢}

بوضع المعادلة فى الصورة العامة للمعادلة التربيعية

س − ٩٦٠ س + ٢٢٤٠٠٠ = صفر

(س − ٥٦٠) (س − ٤٠٠) = صفر

	أو	
إما س − ٥٦٠ = صفر		س − ٤٠٠ = صفر
س = ٥٦٠ وحدة		س = ٤٠٠ وحدة

أى أنه لتحقيق ربح قدرة ١٠٠٠ جنيهاً أسبوعياً، يلزم إنتاج وبيع ٥٦٠ وحدة أو ٤٠٠ وحدة أسبوعياً. وللتحقق من ذلك دعنا نحسب الربح فى الحالتين.

(أ) حالة إنتاج ٥٦٠ وحدة :

ر = س $\left(10-\frac{\text{س}}{160}\right)$ − (٤ س + ٤٠٠)

= ٥٦٠ $\left(10-\frac{560}{160}\right)$ − (٤ × ٥٦٠ + ٤٠٠)

= ٥٦٠٠ − ١٩٦٠ − ٢٦٤٠

= ١٠٠٠ جنيه

(ب) حالة إنتاج ٤٠٠ وحدة :

ر = س $\left(10-\frac{\text{س}}{160}\right)$ − (٤ س + ٤٠٠)

= ٤٠٠ $\left(10-\frac{400}{160}\right)$ − (٤ × ٤٠٠ + ٤٠٠)

= ٤٠٠٠ − ١٠٠٠ − ١٦٠٠ − ٤٠٠

= ٤٠٠٠ − ٣٠٠٠

= ١٠٠٠ جنيه

نلاحظ من هذا المثال أنه فى حالة إنتاج ٥٦٠ وحدة توجد زيادة فى الإيراد قدرها ٦٤٠ جنيها تقابلها زيادة فى التكلفة بنفس القيمة. هب أنك مدير للإنتاج فى مصنع رانا ودينا للعب الأطفال. ما هو القرار المناسب الذى يجب

أن تتخذه فى مثل هذه الحالة ؟ هل هو إنتاج ٥٦٠ وحدة أسبوعياً ؟ أم هو إنتاج ٤٠٠ وحدة أسبوعياً ؟ أكتب تقريراً يتضمن القرار الذى تتخذه مع توضيح أسباب اتخاذك مثل هذا القرار.

مثال (٢٢) :

استثمر شخص مبلغ ٤٠٠ جنيه بمعدل م% فى السنة لمدة عام. وفى نهاية العام استثمر أصل المبلغ والفائدة معاً لمدة عام آخر. أوجد (م) إذا كان جملة ما له بعد العام الثانى ٤٨٤ جنيه.

الحل :

أصل المبلغ المستثمر = أ

معدل الفائدة = م

قيمة الفائدة = ف = أ × $\frac{\text{م}}{100}$

جملة ما للشخص = أ + ف

فى نهاية العام الأول :

جملة ما للشخص = أ + أ × $\frac{\text{م}}{100}$

= ٤٠٠ + ٤٠٠ × $\frac{\text{م}}{100}$

= ٤٠٠ (١ + $\frac{\text{م}}{100}$)

فى نهاية العام الثانى :

جملة ما للشخص = ما له فى نهاية العام الأول + العائد على الاستثمار فى نهاية العام الثانى

٤٨٤ = ٤٠٠ (١ + $\frac{\text{م}}{100}$) + ٤٠٠ (١ + $\frac{\text{م}}{100}$) ($\frac{\text{م}}{100}$)

٤٨٤ = ٤٠٠ (١ + $\frac{\text{م}}{100}$) (١ + $\frac{\text{م}}{100}$)

٤٨٤ = ٤٠٠ (١ + $\frac{\text{م}}{100}$)^{٢}

$$\left(1 + \frac{م}{100}\right)^{2} = \frac{484}{400}$$

$$\left(1 + \frac{م}{100}\right)^{2} = 1.21$$

بأخذ الجذر التربيعى للطرفين :

$$1 + \frac{م}{100} = \pm 1.1$$

إما

$$1 + \frac{م}{100} = 1.10$$

$$\frac{م}{100} = 1.10 - 1$$

$$\frac{م}{100} = 0.10$$

$$م = 10\%$$

أو

$$1 + \frac{م}{100} = -1.10$$

$$\frac{م}{100} = -1.10 - 1$$

$$\frac{م}{100} = -2.10$$

وهذا مرفوض لأن المعدل لا يكون سالباً

معدل الفائدة (معدل العائد) على الاستثمار = ١٠% فى السنة.

١–٣ معادلات الدرجة الثالثة : Third Degree Equations

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثالثة فى متغير واحد تأخذ الشكل :

$$\textbf{أ س}^{3} + \textbf{ب س}^{2} + \textbf{جـ س} + \textbf{د} = \textbf{صفر}$$

حيث : أ = معامل $س^{3}$ ، أ $\neq$ صفر

ب = معامل $س^{2}$

جـ = معامل س

د = الحد المطلق

ولحل المعادلة التكعيبية يجب اتباع الخطوات الآتية :

١– نأخذ الحد المطلق ونحلله إلى عوامله الأولية.

٢– نعوض بهذه العوامل فى المعادلة التكعيبية.

٣– نأخذ العامل الذى يحقق هذه المعادلة فيكون هو الجذر الأول.

٤- نقسم المعادلة التكعيبية على (س - الجذر الأول) فتنتج معادلة من الدرجة الثانية.

٥- نقوم بحل معادلة الدرجة الثانية بالتحليل أو بالقانون نحصل على الجذرين الآخرين.

مثال (٢٣) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التكعيبية :

س^{٣} - ٧ س^{٢} + ١١ س - ٥ = صفر

الحل :

* نأخذ الحد المطلق ونحلله إلى عوامله الأولية

عوامل العدد ٥ = { ٥ ، -٥ ، ١ ، -١ }

* بالتعويض بهذه العوامل فى المعادلة التكعيبية نجد أن العاملين ٥ ، ١ هما اللذان يحققان هذه المعادلة.

س^{٣} - ٧ س^{٢} + ١١ س - ٥ = صفر

عندما س = ٥ :

الطرف الأيمن = (٥)^{٣} - ٧ (٥)^{٢} + ١١ (٥) - ٥

= ١٢٥ - ١٧٥ + ٥ - ٥

= صفر

عندما س = ١ :

الطرف الأيمن = (١)^{٣} - ٧ (١)^{٢} + ١١ (١) - ٥

= ١ - ٧ + ١١ - ٥

= صفر

* نختار أحد العاملين كجذر للمعادلة وليكن العامل ١، ونقسم المعادلة التكعيبية على (س - ١) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية.

س^{٣} - ٧ س^{٢} + ١١ س - ٥	س - ١
- س^{٣} $\pm$ س^{٢}	س^{٢} - ٦ س + ٥

− ٦ س^{٢} + ١١ س − ٥

± ٦ س^{٢} ± ٦ س

---

٥ س − ٥

− ٥ س ± ٥

---

٠ ٠

(س − ١) (س٢ − ٦ س + ٥) = صفر

(س − ١) (س − ٥) (س − ١) = صفر

إما س − ١ = صفر أو س − ٥ = صفر أو س − ١ = صفر

وبالتالى فإن :

س = ١ أو س = ٥ أو س = ١

لاحظ أن معادلة الدرجة الثالثة لها ثلاثة جذور (ثلاثة حلول) غير أننا نلاحظ وجود حلين متساويين من بين حلول هذه المعادلة.

تمارين على الباب الأول

أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية بثلاث طرق مختلفة :

(١) س + ٢ ص = ٢٠
٣ س + ص = ١٠

(٢) ٣ ص – ٣ س – ٣ = صفر
–٣ س – ٣ = ص

(٣) ٢ س + ٣ ص = ١٢
٣ س + ٢ ص = ١٢

(٤) ٢ س – ٨ = –٣ ص
٤ س + ٥ ص – ١٤ = صفر

(٥) س – ٢ ص + ٥ = صفر
ص – س – ٢ = صفر

(٦) س + ص = ٢
س + ٢ ص – ٣ = صفر

(٧) ٢ س + ص = ١
٣ س + ٦ ص = ٢٤

حدد نوع جذرى كل معادلة من المعادلات الآتية بدون حلها :

(٨) ٥ س^{٢} + ٧ = صفر
(٩) ٢ (س^{٢} + ١) = ٥ س
(١٠) (٣ س + ٥) (٢ س – ٣) = –٨
(١١) ٢ س^{٢} – ٣ س – ١ = صفر

(١٢) $\frac{س^2}{3} = \frac{11س}{6} + ١$

كون المعادلة التربيعية إذا علم أن جذريها هما :

(١٣) ٣ ، ٢

(١٤) ١ ، ٥

(١٥) −٢ ، ٣

أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظم المعادلات الآتية :

(١٦) ٢ س + ص + ع = ٦
س + ٩ ص + ع = ٢٢
س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢

(١٧) س$_{1}$ + ٣ س$_{2}$ + س$_{3}$ = ٨
س$_{2}$ + ٣ س$_{1}$ + س$_{3}$ = ٦
−س$_{3}$ + س$_{1}$ + ٥ س$_{2}$ = ١٠

(١٨) س$_{1}$ + س$_{2}$ + س$_{3}$ = ٤
٢ س$_{1}$ + ٥ س$_{2}$ + ٢ س$_{3}$ = ٣
س$_{1}$ + ٧ س$_{2}$ − ٧ س$_{3}$ = ٥

(١٩) ٣ س + ٢ ص − ع = ٨
س + ٣ ص + ٦ ع = ٢٠
٧ س + ٢ ص − ٣ ع = ١٢

(٢٠) ٢ س + ص − ٢ ع − ٤ = صفر
س − ٢ ص + ع + ٢ = صفر
٥ س − ٥ ص + ع + ٢ = صفر

(٢١) ٢س + ص + ٤ ع = ١٦
٤س + ٥ص + ٣ ع = ٢٣
٣س + ٢ص + ٣ ع = ١٦

(٢٢) س + ٢ص - ٥ ع = ٩
٣س - ع - ٢٠ = ص
ص = ٢٠ - ٤س + ٦ ع

(٢٣) ينتج مصنع منيرة نوعين من المصابيح الكهربائية. ويوجد بالمصنع قسمان للإنتاج. إذا علم أن الوحدة من النوع الأول تحتاج ٣ ساعات بالقسم الأول ثم ٥ ساعات فى القسم الثانى. وأن الوحدة من النوع الثانى يلزمها ساعتان فى القسم الأول، ٤ ساعات فى القسم الثانى، إذا كانت ساعات التشغيل المتاحة فى القسم الأول هى ١٣٠٠ ساعة فى حين أن عدد ساعات التشغيل المتاحة فى القسم الثانى هو ٢٤٠٠ ساعة. والمطلوب إيجاد مستوى الإنتاج من كل نوع من المصابيع بفرض أن المصنع يستخدم كافة الطاقات الإنتاجية المتاحة.

(٢٤) منذ ٥ سنوات، كان عمر سارة ضعف عمر أخيها صلاح. أوجد عمر سارة إذا كان مجموع عمريهما الآن ٤٠ عاماً.

(٢٥) اشترى تاجر سيارات مستعملة سيارتين بمبلغ ١٠١٥٠ جنيهاً. فإذا باع إحدى السيارتين بربح ١٠% والأخرى بخسارة ٥% أوجد ثمن شراء كل سيارة إذا حقق التاجر ربحاً قدره ٦٤٧ جنيهاً من كلتا العمليتين.

(٢٦) يقوم مصنع رانا بإنتاج ثلاثة أنواع من المشروبات الغازية. يحتاج كل نوع إلى ٣ أنواع من المواد الخام، حيث يلزم إنتاج الوحدة من النوع الأول وحدتان من المادة الخام (أ)، ٤ وحدات من المادة الخام (ب)، ٣ وحدات من المادة الخام (جـ)، ويلزم لإنتاج الوحدة من النوع الثانى

وحدة واحدة من المادة الخام (أ)، ٥ وحدات من المادة الخام (ب)، وحدتان من المادة الخام (جـ). كما تحتاج الوحدة المنتجة من النوع الثالث إلى ٤ وحدات من المادة الخام (أ)، ٣ وحدات من المادة الخام (ب)، ٣ وحدات من المادة الخام (جـ) فإذا علمت أن سعر بيع الوحدة من كل نوع من الأنواع الثلاثة هى ٨ جنيهات، ١٢ جنيهاً، ١٥ جنيهاً على الترتيب. أوجد عدد الوحدات التى يمكن إنتاجها من كل نوع بفرض استخدام جميع الإمكانيات المتاحة من المواد الخام إذا علمت أن المتاح من المواد الخام ٨٠٠٠ وحدة، ١١٥٠٠ وحدة، ٨٠٠٠ وحدة على الترتيب.

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية باستخدام القانون :

(٢٧) س^{٢} + ٣ س + ١ = صفر

(٢٨) ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤ = صفر

(٢٩) س^{٢} + س − ٣ = صفر

(٣٠) ٤ س^{٢} + ٢٠ س + ٢٥ = صفر

(٣١) ٥ س (س + ٢) + ٦ = صفر

(٣٢) (٤ س − ١) (٢ س + ٣) = ١٨ س − ٤

(٣٣) (س + ١)^{٢} = ٢ (س − ١)^{٢}

(٣٤) (٢ س + ١)^{٢} = ٣ (س + ١)^{٢}

(٣٥) س^{٢} + ٦ س − ٢ = صفر

(٣٦) ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = صفر

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية بالتحليل :

(٣٧) س^{٢} − ٨ س = صفر

(٣٨) س^{٢} − ١ = صفر

(٣٩) س^{٢} − ٧ س + ١٢ = صفر

(٤٠) س^{٢} − ٦ س + ٩ = صفر

(٤١) س^{٢} − ٢٥ = صفر

(٤٢) س^{٢} + ٤ س + ٤ = صفر

(٤٣) س^{٤} − ٥ س^{٢} + ٤ = صفر

(٤٤) س^{٤} − ٣ س^{٢} + ٢ = صفر

(٤٥) ٦ س^{٢} + $\frac{5س}{2}$ + $\frac{1}{4}$ = صفر

(٤٦) $\frac{س^{2}}{2}$ + $\frac{10س}{3}$ + ٢ = صفر

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية بطريقة إكمال المربع :

(٤٧) س^{٢} + ٢ س − ٤ = صفر

(٤٨) س^{٢} + ٥ س + ٥ = صفر

(٤٩) ٢ س^{٢} − ١٤ س + ١ = صفر

(٥٠) س^{٢} + ٦ س − ١ = صفر

(٥١) س^{٢} − ٣ س − ١ = صفر

(٥٢) ٤ س^{٢} − ٨ س − ٣ = صفر

(٥٣) ٧ س + ٣ (س^{٢} − ٥) = س − ٣

(٥٤) ٢ س (٤ س − ١) = ٤ + ٢ س

(٥٥) س (س + ١) (س + ٣) = (س + ٢)^{٢}

(٥٦) (س + ١)^{٣} − (س − ١)^{٣} = ٨ س

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التكعيبية الآتية :

(٥٧) س^{٣} − ٨ س٢ + ١٢ س − ٥ = صفر

(٥٨) س^{٣} − س٢ − ٥ س + ٥ = صفر

(٥٩) س^{٣} − ٨ س٢ + ١٨ س − ٥ = صفر

(٦٠) س^{٣} − ٦ س٢ + ١١ س − ٦ = صفر

(٦١) س^{٣} − ٥ س٢ + ٨ س − ٤ = صفر

أوجد مجموعة الحل بالنسبة للمتغير س :

(٦٢) $\frac{1}{س} = \frac{2}{ص} + \frac{3}{ع}$

(٦٣) $\frac{3}{2س} + \frac{1}{ع} - \frac{5}{2ص} =$ صفر

(٦٤) عددان مجموعهما ١٥، ومجموع مربعيهما ١٣٧. فما هما العددان ؟

(٦٥) عددان فرديان متتاليان حاصل ضربهما ١٤٣ . أوجد العددين.

(٦٦) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم. أوجد طولى الضلعين الآخرين للمثلث إذا كان مجموعهما ١٧ سم.

(٦٧) مستطيل محيطه ٢٤ سم، ومساحته ٣٢سم٢. أوجد طولى بعديه.

(٦٨) بفرض أن التكلفة الثابتة للإنتاج فى مصنع شيرين للملابس الجاهزة تساوى ٨٠٠٠٠ جنيه وأن التكلفة المتغيرة تساوى ٣ أمثال حجم الإنتاج مضافاً إليه خمس مربع هذا الحجم. وإذا كان سعر بيع الوحدة ٣٠ جنيهاً.

(أ) ضع المعادلات الرياضية الدالة على :

التكاليف الكلية ، الإيراد الكلى ، الربح

(ب) أوجد ربح المصنع إذا أنتج ٥٠٠ وحدة.

(٦٩) ينتج مصنع النجوم للأثاث (س) حجرة نوم للأطفال أسبوعياً من الخشب الأرو بغرض التصدير. فإذا كان سعر الوحدة يتحدد بالعلاقة :

ع = ٦٠٠ + ٥ س ، وأن تكلفة الإنتاج الكلية هى ٨٠٠٠ + ٧٥ س.

(أ) أوجد عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها المصنع أسبوعياً ليحقق إيراد قدره ١٧٥٠٠ جنيه.

(ب) ما هو سعر بيع الوحدة الذى يحقق إيراداً أسبوعياً قدرة ١٨٠٠٠ جنيه.

(جـ) أوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها لتحقق ربحاً أسبوعياً قدره ٥٥٠٠ جنيه.

(د) ما هو سعر بيع الوحدة الذى يحقق ربحاً اسبوعياً قدره ٥٧٥٠ جنيه.

(٧٠) أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظم المعادلات الآتية باستخدام الحاسب الآلى:

(أ) س − ٢ ص + ٥ = صفر

ص − س − ٢ = صفر

(ب) ٢ س + ص − ٢ ع − ٤ = صفر

س − ٢ ص + ع + ٢ = صفر

٥ س − ٥ ص + ع + ٢ = صفر

(جـ) ٢ س + ص − ٢ ع − ٤ = صفر

س − ٢ ص + ع + ٢ = صفر

٥ س − ٥ ص + ع + ٢ = صفر

(د) ٢ س + ص + ٤ ع = ١٦

٤ س + ٥ ص + ٣ ع = ٢٣

٣ س + ٢ ص + ٣ ع = ١٦