الباب الثانى

المتباينات

Inequalities

الباب الثانى

المتباينات

Inequalities

٢−١ مقـدمة :

تستخدم المتباينـات فـى صـياغة الكثيـر مـن النمـاذج الاقتصـادية مثـل نمـاذج الانتـاج ونمـاذج التسـويق وغيرهـا؛ فـلا يمكـن صـياغة نمـاذج البرمجـة الخطية مثلاً بدون استخدام المتباينات. وسوف نتناول فى هذا الباب كلا من المتباينات الخطية والتربيعية فى متغير واحد ثم المتباينات الخطية فى متغيرين حيث نعرض كيفيـة حل هذه المتباينـات جبرياً وبيانياً ومن هنا نتعرف علـى كيفية حل نظام من المتباينات الخطية فى متغيرين بيانياً. ثم نختتم هذا الباب بعرض لبعض التطبيقات الاقتصادية والتجارية التى تؤول إلى تباينات خطية. ولكن ما هى المتباينة ؟ وما هى خصائصها ؟

٢−٢ المتباينات الخطية فى متغير واحد :

Linear inequalities in one variable

إذا كانت المعادلـة equation عبارة عن تقرير statement يعبر عن تسـاوى مقـدارين جبـريين؛ بمعنـى أن علاقـة (=) هـى الرمـز الـذى يعبـر عـن المعادلة عند صياغتها جبرياً فيجعل طرفها الأيمن مساوياً لطرفها الأيسر، فإن المتباينـة تعرف بأنهـا تقريـر يعبـر أصـلاً عـن عدم تسـاوى مقـدارين جبـريين. وتستخدم الرموز الآتية لصياغة المتباينات جبرياً :

> علامة أكبر من Greater than

≥ علامة أكبر من أو تساوى Greater than or equal

< علامة أقل من Less than

≤ علامة أقل من أو يساوى Less than or equal

هذا وتعرف المتباينات التى تحتوى على (< أو >) بأنها متباينات تامة Strict inequalities أما المتباينات التى تحتوى على (≥ أو ≤) فتعرف بأنها متباينات ضعيفة أو غير تامة Weak inequalities. والصورة العامة للمتباينة الخطية فى متغير واحد تأخذ الشكل الآتى :

أ س + ب < صفر

حيث أ ، ب ثابتان حقيقيان ، أ ≠ صفر

ومن الجدير بالذكر هنا أن علامة التباين (<) بالصورة العامة قد تكون إحدى العلامات (≥) أو (>) أو (≤).

خصائص المتباينات : Properties of Inequalities

١− إذا أضفنا إلى طرفى المتباينة أو طرحنا من الطرفين مقداراً حقيقياً، فإن اتجاه المتباينة لا يتغير.

أى أنه إذا كان أ < ب ، وكان جـ أى عدد حقيقى فإن :

أ + جـ < ب + جـ ،

أ − جـ < ب − جـ

الإثبات : نفرض أن أ < ب ، جـ أى عدد حقيقى

أ < ب

أ − ب < صفر

(أ + جـ) − (ب + جـ) = أ + جـ − ب − جـ

= أ − ب > صفر

(أ + جـ) − (ب + جـ) كمية موجبة

أ + جـ > ب + جـ وهو المطلوب إثباته

٢- إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة (فى / على) مقدار حقيقى موجب، فإن اتجاه المتباينة لا يتغير.

أى أنه إذا كان أ > ب ، جـ عدد حقيقى موجب فإن :

أ جـ > ب جـ ،

$$\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$$

الإثبات : نفرض أن أ > ب ، جـ عدد حقيقى موجب

أ − ب > صفر (كمية موجبة)

(أ − ب) جـ > صفر (حاصل الضرب كمية موجبة)

أ جـ − ب جـ > صفر

أ جـ > ب جـ وهو المطلوب إثباته

٣- إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة (فى / على) مقدار حقيقى سالب، فإن إتجاه التباين يتغير.

أى أنه إذا كان أ > ب ، جـ عدد حقيقى سالب فإن :

أ جـ < ب جـ ،

$$\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$$

الاثبات : نفرض أن أ > ب ، جـ عدد حقيقى سالب

∴ أ − ب > صفر (كمية موجبة)

وحيث أن حاصل ضرب كميتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة هو كمية سالبة ، فأن :

(أ − ب) جـ < صفر (حاصل الضرب كمية سالبة)

∴ أ جـ − ب جـ < صفر

∴ أ جـ < ب جـ وهو المطلوب إثباته

مثال (١) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية :

س − ٥ ≤ ٣

الحل : س − ٥ ≤ ٣

بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (−٥) لكلا الطرفين

س − ٥ + ٥ ≤ ٣ + ٥

س ≤ ٨

∴ س ∈] ∞ ، ٨]

مثال (٢) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية :

س + ٢ > ٤

الحل :

س + ٢ > ٤

بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (٢) لكلا الطرفين

س + ٢ − ٢ > ٤ − ٢

س > ٢

$\therefore$ س $\in$] − ∞ ، ٢]

مثال (٣) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية :

٣ س + ١ ≥ − ٥

الحل :

٣ س + ١ ≥ − ٥

بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (١) لكلا الطرفين

٣ س + ١ − ١ ≥ − ٥ − ١

٣ س ≥ − ٦

بضرب كلا الطرفين فى المعكوس الضربى للعدد (٣)

$$\frac{1}{3} \times 3 \text{ س} \geq -6 \times \frac{1}{3}$$

س ≥ −٢

$\therefore$ س $\in$] − ∞ ، − ٢ [

مثال (٤) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية :

٣ − $\frac{1}{4}$ س ≤ ٧

الحل :

٣ − $\frac{1}{4}$س ≤ ٧

بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (٣) لكلا الطرفين

٣ − ٣ − $\frac{1}{4}$ س ≤ ٧ − ٣

$$-\frac{1}{4}\text{س} \le ٤$$

بضرب طرفى المعادلة فى المعكوس الضربى للعدد $(-\frac{1}{4})$ ، أى بالضرب فى (−٤) نجد أن :

$$-\frac{1}{4}(-٤)\ \text{س} \ge ٤\ (-٤)$$

$$\text{س} \ge -١٦$$

$$\therefore\ \text{س} \in\ ]-\infty\ ،\ -١٦\ ]$$

لاحظ أننا ضربنا طرفى المتباينة فى كمية سالبة، وبالتالى تغير اتجاه المتباينة.

مثال (٥) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية ومثل الحل على خط الأعداد

$$٣\ \text{س} + ٥ > ٤\ \text{س} - ١$$

الحل :

بجعل الحدود التى تحتوى على (س) بالطرف الأيمن للمتباينة وباقى الحدود بالطرف الأيسر مع تغيير الإشارات نجد أن :

$$٣\ \text{س} - ٤\ \text{س} > -١ - ٥$$

$$-\text{س} > -٦$$

بضرب طرفى المتباينة فى (−١)

$$\therefore\ \text{س} < ٦$$

$$\therefore\ \text{س} \in\ ]\ ٦\ ،\ \infty\ [$$

هذا ويمكن تمثيل الحل على خط الأعداد كالآتى :

[— — —

∞+ ٦ صفر − ∞

مثال (٦) :

حل المتباينة الآتية :

$$\text{س} + \frac{3}{4} \le \frac{5\text{س} - 2}{3} + ٣$$

الحل :

بضــرب طرفــى المتباينــة فــى المضــاعف المشــترك الأصــغر (م.م.أ.) للمقامات وهو العدد (١٢) نجد أن :

$$١٢ \left(\text{س} + \frac{3}{4}\right) \le ١٢ \left(\frac{5\text{س} - 2}{3} + 3\right)$$

$$١٢\,\text{س} + ٩ \le ٤\,(٥\,\text{س} - ٢) + ٣٦$$

$$١٢\,\text{س} + ٩ \le ٢٠\,\text{س} - ٨ + ٣٦$$

بجعل الحدود التى تحتوى على (س) بالطرف الأيمن للمتباينـة وباقى الحدود بالطرف الأيسر مع تغيير إشارة الحد الذى ينقل من طرف إلى آخر.

$$١٢\,\text{س} - ٢٠\,\text{س} \le -٨ - ٩ + ٣٦$$

$$-٨\,\text{س} \le ١٩$$

بقسمة طرفى المتباينة على (− ٨)

$$\frac{-8\,\text{س}}{-8} \ge \frac{19}{-8}$$

$\text{س} \geq -\frac{19}{8}$

$\therefore \ \text{س} \in \ ]-\infty \ ، \ -\frac{19}{8}]$

نلاحظ أن اتجاه التباين تغير لأننا قسمنا طرفى المتباينة على كمية سالبة.

مثال (٧) :

حل المتباينة الآتية مع تمثيل الحل على خط الأعداد.

س − ١٣ < ٢ س − ٧ ≥ ٨ − ٣ س

الحل :

يمكن حل هذه المتباينة المزدوجة وذلك بتقسيمها إلى متباينتين، وحل كل متباينة على حدة كالآتى:

المتباينة الأولى : س − ١٣ < ٢ س − ٧

بجعل الحدود التى تحتوى على (س) بالطرف الأيمن وباقى الحدود فى الطرف الأيسر مع مراعاة الإشارات.

س − ٢ س < − ٧ + ١٣

− س < ٦

بضرب طرفى المتباينة فى (−١)

س > − ٦

∴ س ∈]− ٦ ، ∞[

+∞   صفر   −٦   −∞

المتباينة الثانية :

٢ س − ٧ ≥ ٨ − ٣ س

٢ س + ٣ س ≥ ٨ + ٧

٥ س ≥ ١٥

بقسمة طرفى المتباينة على (٥)

س ≥ ٣

∴ س ∈] −∞ ، ٣]

– – –]–

∞ ٣ صفر −∞

وبالتالى فإن مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هى الفترة التى تمثل التقاطع بين الفترتين] −٦ ، ∞ [،] −∞ ، ٣]، أى أن :

س ∈] − ٦ ، ∞ [∩] − ∞ ، ٣]

س ∈] − ٦ ، ٣]

–[—]—

∞ ٣ صفر −٦ −∞

مثال (٨) :

إذا علمت أن سعر بيع لوحة المفاتيح Keyboard فى مصنع الشركة العربية للالكترونيات هو مبلغ ٦٠ جنيهاً، وأن تكلفة اللوحة الواحدة من المواد الخام والعمالة الفنية هو مبلغ ٤٠ جنيهاً. ولتنفيذ الخطة الانتاجية توجد تكاليف إضافية (ثابتة) قدرها ٣٠٠٠ جنيه اسبوعياً. أحسب عدد اللوحات التى يجب على الشركة أن تنتجها لكى تحقق ربحاً أسبوعياً قدره ١٠٠٠ جنيه علىالأقل.

الحل :

نفرض أن عدد اللوحات المنتجة أسبوعياً هو (س)

التكاليف المتغيرة = عدد اللوحات المنتجة × تكلفة إنتاج اللوحة

= س × ٤٠ = ٤٠ س

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

ت = ٤٠ س + ٣٠٠٠

الإيراد = سعر بيع اللوحة × عدد اللوحات

ى = ٦٠ × س = ٦٠ س

الربـح = الإيراد − التكاليف

ر = ى − ت

= ٦٠ س − (٤٠ س + ٣٠٠٠)

= ٦٠ س − ٤٠ س − ٣٠٠٠

= ٢٠ س − ٣٠٠٠

وحيث أن الربح المستهدف أسبوعياً هو ١٠٠٠ جنيه على الأقل، إذن :

٢٠ س − ٣٠٠٠ ≤ ١٠٠٠

٢٠ س ≤ ١٠٠٠ + ٣٠٠٠

٢٠ س ≤ ٤٠٠٠

س ≤ ٢٠٠

أى أنـه يجـب علـى الشـركة العربيـة للالكترونيـات أن تنـتج ٢٠٠ لوحـة مفـاتيح على الأقل لكى تحقق ربحاً قدره ١٠٠٠ جنيه على الأقل اسبوعياً.

٢−٣ المتباينات الخطية فى متغيرين :

Linear inequalities in two variables

تأخذ المتباينة الخطية فى متغيرين الصورة العامة الآتية :

أ س + ب ص + جـ > صفر

حيث : أ ، ب ، جـ ثوابت حقيقية ، أ ، ب ≠ صفر

وكما سبق بالنسبة للصورة العامة للمتباينة الخطية فى متغير واحد فإن علامة التباين (>) يمكن أن تستبدل بإحدى العلامات (≤) أو (<) أو (≥). وحل هذه المتباينة بيانياً يمثل بالمنطقة المحددة بالخط المستقيم الذى يمثل المعادلة أ س + ب ص + جـ = صفر ، وبالتالى فإن جميع النقط (س ، ص) التى تقع فى هذه المنطقة من المستوى تحقق المتباينة.

مثال (٩) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية بيانياً.

٣ س + ٥ ص − ١ > صفر

الحل :

تتلخص خطوات الحل فى الآتى :

* نحول المتباينة إلى معادلة :

٣ س + ٥ ص − ١ = صفر

* نوجد نقطتين تحقق هذه المعادلة كالآتى :

بوضع س = صفر ، نجد أن :

٣ (٠) + ٥ ص − ١ = صفر

٥ ص = ١

ص = $\frac{1}{5}$

بوضع ص = صفر ، نجد أن :

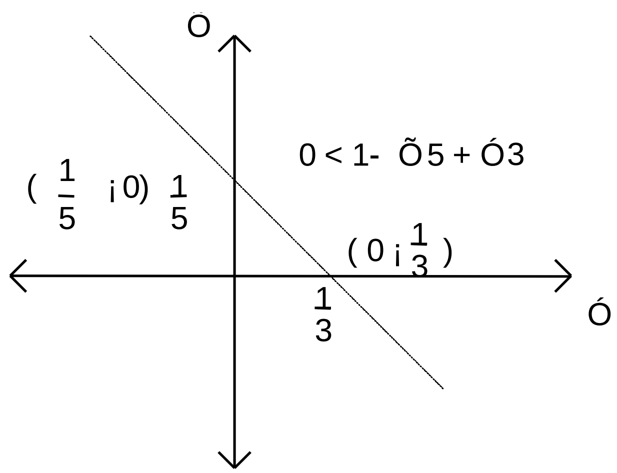
٣ س + ٥(٠) - ١ = صفر

٣ س = ١

س = $\frac{1}{3}$

أى أن النقطتين (صفر ، $\frac{1}{5}$) ، ($\frac{1}{3}$، صفر) تقعان على الخط المستقيم الممثل لهذه المعادلة.

* نقوم بتمثيل هاتين النقطتين فى المستوى ونصل بينهما فنحصل على الخط المستقيم الممثل لهذه المعادلة.



* حيث أن علامة المتباينة هى أكبر من (>) فإن المنطقة التى تعلو هذا الخط هى مجموعة الحل للمتباينة؛ بمعنى أن أى نقطة (س ، ص) تقع فى هذه المنطقة تحقق المتباينة. وللتحقق من ذلك نأخذ النقطة (١ ، ٢) والتى

تنتمـــى إلـــى منطقــة الحــل المظللــة، حيــث س = ١ ، ص = ٢ ونقــوم بالتعويض فى الطرف الأيمن من المتباينة فنجد أنه أكبر من الصفر وذلك كالتالى :

الطرف الأيمن = ٣ س + ٥ ص – ١

= ٣ (١) + ٥ (٢) – ١

= ٣ + ١٠ – ١ = ١٢ > صفر

وهكذا بالنسبة لجميع النقاط التى تنتمى إلى هذه المنطقة المظللة. ومن الجدير بالذكر هنا أننا قمنا برسم الخط ا لممثل للمعادلة متقطعاً Dashed line لأن علامة التباين (>) وسوف نفعل نفس الشئ بالنسبة للعلامة (<). أما فى حالة تناولنا للمتباينات التى تحتوى على (≤) أو (≥) فإننا سوف نرسم الخط الممثل للمعادلة خطاً مستمراً بلا فواصل (Solid line). وبصفة عامة فإن أى نقطة تقع على الخط المتقطع لا تحقق المتباينة بينما النقاط التى تقع على الخط المستمر تحقق المتباينة المطلوب حلها.

مثال (١٠) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة :

٣ س + ٢ ص < ٦

الحل :

٣ س + ٢ ص = ٦

نضع س = صفر ، نجد أن :

٣ (٠) + ٢ ص = ٦

٢ ص = ٦

ص = ٣

أى أن النقطة (٠ ، ٣) تحقق المعادلة.

نضع ص = صفر ، نجد أن :

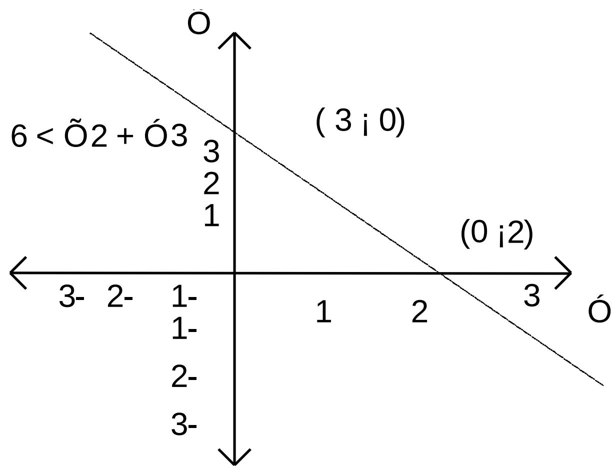
٣ س + ٢ (٠) = ٦

٣ س = ٦

س = ٢

أى أن النقطة (٢ ، ٠) تحقق المعادلة.

نقوم بتمثيل هاتين النقطتين ونصل بينهما بخط متقطع. وحيث أن علامة التباين < ، فإن المنطقة المظللة التى تقع أسفل الخط المتقطع تحقق المتباينة الأصلية.



ولاختبار ذلك نأخذ النقطة (−٣ ، ١) والتى تنتمى لمنطقة الحلول على سبيل المثال نجد أن :

الطرف الأيمن = ٣ س + ٢ ص

= ٣ (−٣) + ٢ (١)

= − ٩ + ٢ = − ٧ > ٦

لاحظ أن أى نقطة تنتمى للخط المنقط لا تحقق المتباينة.

مثال (١١) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

٢ س − ٣ ص ≤ ٦

الحل :

٢ س − ٣ ص = ٦

بوضع س = صفر ، نجد أن :

٢ (٠) − ٣ ص = ٦

− ٣ ص = ٦

ص = −٢

أى أن النقطة (٠ ، −٢) تحقق المعادلة.

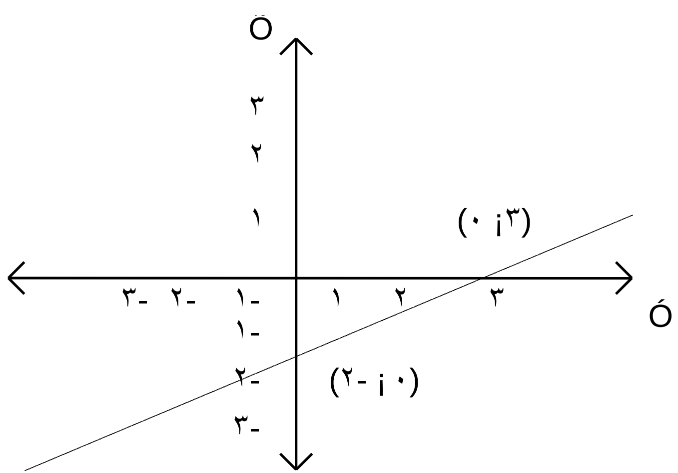
بوضع ص = صفر ، نجد أن :

٢ س − ٣ (٠) = ٦

٢ س = ٦

س = ٣

أى أن النقطة (٣ ، ٠) تحقق المعادلة.



نلاحظ هنا أن منطقة الحلول هى عبارة عن مجموعة النقط التى تقع على الخط المستقيم بالاضافة إلى مجموعة النقاط التى تقع فى المنطقة المظللة.
كما نلاحظ أن :

٢ س − ٣ ص ≥ ٦

− ٣ ص ≥ − ٢ س + ٦

ص ≥ $\frac{2}{3}$ س − ٢

ولذلك نجد أن منطقة الحلول تقع فوق الخط المستقيم.

مثال (١٢) :

حل المتباينة الآتية :

٣ س ≤ ص − ٣

الحل :

ص − ٣ ≥ ٣ س

ص ≥ ٣ س + ٣

ص = ٣ س + ٣

نضع س = صفر ، أى أن :

ص = ٣ (٠) + ٣

= ٣

أى أن النقطة (٠ ، ٣) تحقق المعادلة.

بوضع ص = صفر ، أى أن :

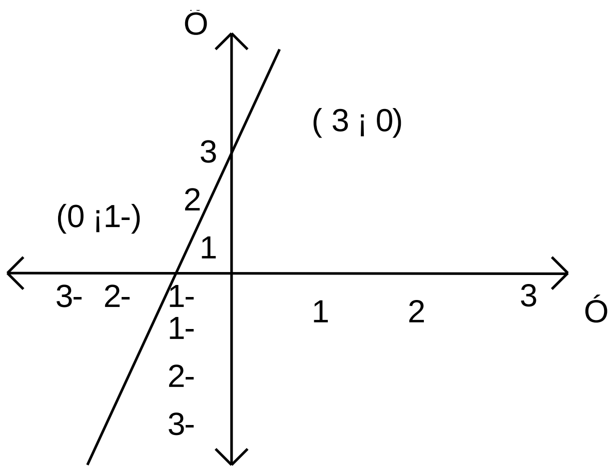
صفر = ٣ س + ٣

٣ س = − ٣

س = −١

أى أن النقطة (−١ ، ٠) تحقق المعادلة

بتوقيع النقطتين (٠ ، ٣) ، (−١ ، ٠) فى المستوى والربط بينهما نحصل على الخط المستقيم الممثل للمعادلة ص = ٣ س + ٣ وتكون منطقة الحلول للمتباينة هى المنطقة المظللة الموجودة أسفل هذا الخط بالاضافة إلى جميع النقاط التى تنتمى لهذا الخط.



ومما لا شك فيه أن اتجاه المتباينة يحدد بشكل قاطع المنطقة التى توجد بها الحلول الممكنة للمتباينة سواءً أكانت فوق الخط أو أسفله، بيد أن تحديد اتجاه المتباينة الحقيقى يتطلب وضعها فى الصورة العامة الآتية :

ص > م س + جـ

حيث : م : ميل الخط المستقيم الممثل للمعادلة ص = م س + جـ

جـ : الجزء الذى يقطعه الخط من المحور الرأسى

مع ملاحظة أن علامة (>) قد تكون (≤) أو (<) أو (≥).

مثال (١٣) :

حدد منطقة الحلول الممكنة للمتباينة الآتية من حيث كونها أعلى الخط المستقيم أم أسفله .

٢ س − ص ≥ ٥

الحل :

نضع المتباينة فى الصورة العامة وذلك بجعل الحد الذى يحتوى على المتغير (ص) فى الطرف الأيمن وباقى الحدود فى الطرف الأيسر مع مراعاة الإشارات.

− ص ≥ − ٢ س + ٥

بضرب طرفى المتباينة فى (−١) نجد أن :

ص ≤ ٢ س − ٥

وحيث أن ميل الخط المستقيم يساوى ٢ وبالتالى فإن هذا الخط المستقيم يميل على الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية حادة ويقطع المحور الرأسى عند النقطة ص = − ٥. وبالتالى فإن منطقة الحلول الممكنة لهذه المتباينة تقع أعلى هذا الخط متضمنة النقاط التى تقع على الخط نفسه.

مثال (١٤) :

شخص يريد إستثمار مبلغ وقدره ٥٠٠٠٠ جنيه وذلك بشراء نوعين من الأسهم (أ) ، (ب) فى بورصة الأوراق المالية. فإذا كان سعر السهم من النوع (أ) هو ٢٥ جنيهاً، وسعر السهم من النوع (ب) هو ٥٠ جنيهاً. حدد المنطقة فى المستوى التى تعطى هذا المستثمر البدائل المختلفة والتى تساعده فى تحديد عدد الأسهم التى يمكن أن يشتريها من كل نوع فى ضوء إمكانياته المادية المتاحة.

الحل :

نفرض أن عدد الأسهم من النوع (أ) هو س

وأن عدد الأسهم من النوع (ب) هو ص

وحيث أن قيمة الأسهم = ثمن السهم الواحد × عدد الأسهم

إذن قيمة الأسهم من النوع (أ) = ٢٥ س

وقيمة الأسهم من النوع (ب) = ٥٠ ص

وحيث أن المبلغ المتاح لدى هذا الشخص ٥٠٠٠٠ جنيه فهو يستطيع أن يشترى هذه الأسهم بما قيمته ٥٠٠٠٠ جنيه أو أقل، وبالتالى فإن :

٢٥ س + ٥٠ ص ≤ ٥٠٠٠٠

ولحل هذه المتباينة نحولها إلى معادلة :

٢٥ س + ٥٠ ص = ٥٠٠٠٠

بوضع س = صفر ، نجد أن :

٢٥ (٠) + ٥٠ ص = ٥٠٠٠٠

٥٠ ص = ٥٠٠٠٠

ص = ١٠٠٠

وبالتالى فإن النقطة (٠ ، ١٠٠٠) تحقق هذه المعادلة.

بوضع ص = صفر ، نجد أن :

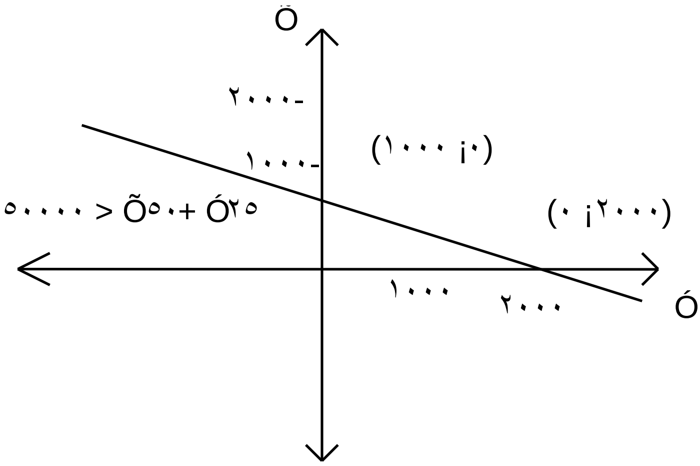
٢٥ س + ٥٠ (٠) = ٥٠٠٠٠

٢٥ س = ٥٠٠٠٠

س = ٢٠٠٠

أى أن النقطة (٢٠٠٠ ، ٠) تحقق هذه المعادلة.

نقوم بتوقيع هاتين النقطتين ونصل بينهما فنحصل على الخط المستقيم الذى يمثل هذه المعادلة.



أى أن منطقة الحلول لهذه المتباينة هى المنطقة التى تقع أسفل الخط المستقيم بالإضافة إلى النقاط التى تنتمى إلى الخط المستقيم نفسه. وحيث أن عدد الأسهم لا يمكن أن يكون قيمة سالبة، لذلك اقتصر التظليل على الجزء من منطقة الحلول بالربع الأول فقط. أى أن أى نقطة تنتمى إلى هذه المنطقة تعتبر بديلاً يستطيع هذا المستثمر تنفيذه. وتجدر الإشارة هنا أن هذا الشخص سوف يختار البديل الذى يحقق له أقصى ربح ممكن من هذا الاستثمار، وهذا ما سوف نتناوله تفصيلاً فى معرض حديثنا عن مشاكل البرمجة الخطية.

٢–٤ المتباينات التربيعية فى متغير واحد :

Quadratic Inequalities in one variable

الصورة العامة للمتباينة التربيعية هى :

أ س^{٢} + ب س + جـ ≤ صفر

حيث أ ، ب ، جـ ثوابت ، أ ≠ صفر

وتجدر الإشارة هنا أن علامة (≤) فى الصورة العامة يمكن أن يحل محلها (<) أو (≥) أو (>).

ولحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية :

١- نكتب المتباينة التربيعية فى الصورة العامة.

٢- نستبدل علامة التباين بعلامة التساوى (=).

٣- نحل المعادلة التربيعية ونقسم خط الأعداد إلى فترات حسب جذور المعادلة.

٤- نختار قيمة حقيقية من كل فترة ونعوض بها فى المتباينة والقيمة التى تحقق المتباينة تكون فترتها هى مجموعة الحل.

مثال (١٥) :

حل المتباينة التربيعية الآتية :

س^{٢} + ٥ س + ٦ ≥ صفر

الحل : المتباينة فى صورتها العامة

س^{٢} + ٥ س + ٦ = صفر

بحل هذه المعادلة التربيعية باستخدام التحليل

(س + ٣) (س + ٢) = صفر

إما س + ٣ = صفر | أو س + ٢ = صفر

س = − ٣ | س = − ٢

باستخدام جذرى المعادلة (−٣) ، (−٢) نقسم خط الأعداد إلى ثلاث فترات ثم نحدد أى من هذه الفترات تحقق المتباينة فتكون هى مجموعة الحل.

] −∞ ، −٣ [	[−٣ ، −٢]	] −٢ ، ∞ [
−∞ −٣	−٢	+∞

فى الفترة] −٢ ، ∞ [:

نختار نقطة داخل هذه الفترة ولتكن النقطة (٥) ونقوم بالتعويض بهذه القيمة فى الطرف الأيمن للمتباينة.

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٥ س + ٦

= (٥)^{٢} + ٥ (٥) + ٦

= ٢٥ + ٢٥ + ٦ = ٥٦ > صفر (كمية موجبة)

فى الفترة [−٣ ، −٢] :

نختار نقطة داخل هذه الفترة ولتكن النقطة (−٢,٥) ونقوم بالتعويض عن هذه النقطة فى الطرف الأيمن من المتباينة.

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٥ س + ٦

= (−٢,٥)^{٢} + ٥ (−٢,٥) + ٦

= ٦,٢٥ − ١٢,٥ + ٦

= ١٢,٢٥ − ١٢,٥ = ٠,٢٥ < صفر (كمية سالبة)

فى الفترة] −∞ ، −٣ [:

نختار نقطة تقع داخل هذه الفترة ولتكن النقطة (−٥) ونقوم بالتعويض بهذه القيمة فى الطرف الأيمن من المتباينة نجد أن :

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٥ س + ٦

= (−٥)^{٢} + ٥ (−٥) + ٦

= ٢٥ − ٢٥ + ٦ = ٦ > صفر (كمية موجبة)

وحيث أن النقطة س = −٢,٥ هى التى حققت المتباينة فإن الفترة التى تنتمى إليها هذه النقطة هى مجموعة الحل.

إذن مجموعة الحل هى الفترة [−٣ ، −٢].

هذا ويمكن تمثيل هذا الحل على خط الأعداد كالآتى :

—[——]-

−٣ −٢

مثال (١٦) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة التربيعية

$س^{٢} + ٣ س > ٢$

الحل :

نضع المتباينة فى الصورة العامة

$س^{٢} + ٣ س − ٢ > صفر$

نستبدل علامة (>) بعلامة (=) ونقوم بحل المعادلة التربيعية.

$س^{٢} + ٣ س − ٢ = صفر$

وباستخدام القانون العام يمكن حل هذه المعادلة كالآتى :

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = −٢

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - 4أ جـ}}{2أ}$$

$$= \frac{-(3) \pm \sqrt{9 - 4(1)(-2)}}{2\times1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{8+9}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

إما	أو
س $= \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$	س $= \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$
$= \frac{-3 + 4.12}{2}$	$= \frac{-3 - 4.12}{2}$
س = ٠,٥٦	س = −٣,٥٦

جذرا المعادلة هما ٠,٥٦ ، −٣,٥٦

نقسم خط الأعداد إلى ثلاث فترات باستخدام هذين الجذرين ونحدد أى من هذه الفترات تحقق المتباينة فتكون هى مجموعة الحل.

] ٠,٥٦ ، ∞ [	] −٣,٥٦ ، ٠,٥٦ [	] −∞ ، −٣,٥٦ [

+∞ ٠,٥٦ −٣,٥٦ −∞

يتم اختبار كل فترة على حدة وذلك باختيار نقطة داخل كل فترة والتعويض بها فـى المتباينـة. وبالتـالى فـإن النقطـة التـى تحقـق المتباينـة تكـون فترتهـا هـى مجموعة الحل وذلك كالآتى :

الفترة] ٠,٥٦ ، ∞ [:

نختـار نقطـة داخـل هذه الفتـرة ولـتكن النقطـة (٣) ونقوم بـالتعويض عن هذه القيمة فى الطرف الأيمن للمتباينة.

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٣ س − ٢

= (٣)^{٢} + ٣ (٣) − ٢

= ٩ + ٩ − ٢

= ١٨ − ٢ = ١٦ > صفر (كمية موجبة)

الفترة] −٣,٥٦ ، ٠,٥٦ [:

نختار نقطة داخل هذه الفترة ولتكن النقطة (−٢) ونقوم بالتعويض عن هذه القيمة فى الطرف الأيمن للمتباينة.

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٣ س − ٢

= (−٢)^{٢} + ٣ (−٢) − ٢

= ٤ − ٦ − ٢

= −٤ < صفر (كمية سالبة)

الفترة] −∞ ، −٣,٥٦ [:

نختار نقطة داخل هذه الفترة ولتكن النقطة (−٥) ونقوم بالتعويض عن هذه القيمة فى الطرف الأيمن للمتباينة.

الطرف الأيمن = س^{٢} + ٣ س − ٢

= (−٥)^{٢} + ٣ (−٥) − ٢

= ٢٥ − ١٥ − ٢

= ٨ > صفر (كمية موجبة)

من هذا الاختبار نرى أن كلا من الفترة] ٠,٥٦ ، ∞ [والفترة] −∞ ، −٣,٥٦ [تحقق المتباينة.

إذن مجموعة الحل هى الاتحاد بين هاتين الفترتين.

] ٣,٥٦- ، ∞- [∪] ∞ ، ٠,٥٦ [

هذا ويمكن تمثيل هذا الحل على خط الأعداد كالآتى :

-[—]-

٣,٥٦-　　　　　　٠,٥٦

٢-٥ القيمة المطلقة : Absolute value

إذا كان س عدد حقيقى، فإن القيمة المطلقة للعدد س ويرمز لها بالرمز |س| تعرف كالآتى :

|س| = س إذا كانت س > صفر

− س إذا كانت س < صفر

وعلى سبيل المثال فإن : | ٧ | = ٧

| صفر | = صفر

| −٥ | = − (−٥) = ٥

من التعريف السابق نجد أن القيمـة المطلقة لأى عدد حقيقى س هى مقياس هذا العدد بصرف النظر عن إشارته. أى أن |س| > صفر دائماً.

قاعدة [١] :

إذا كان | أ | = ب ، ب ≠ صفر

فإن أ = ب أو أ = − ب

مثال (١٧) :

أوجد مجموعة الحل بالنسبة للمتغير س للمعادلة الآتية :

| ٢ س − ٣ | = ٥

الحل :

باستخدام **قاعدة** (١) نجد أن :

أو	
٢ س – ٣ = –٥	إما ٢ س – ٣ = ٥
٢ س = – ٥ + ٣	٢ س = ٥ + ٣
٢ س = –٢	٢ س = ٨
س = –١	س = ٤

مجموعة الحل هى { ٤ ، –١ }

قاعدة [٢] :

إذا كان | أ | = | ب |

فإن أ = ب **أو** أ = – ب

مثال (١٨) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

| ٣ س – ٢ | = | ٢ س + ٧ |

الحل :

من قاعدة (٢) نجد أن :

٣ س – ٢ = + (٢ س + ٧)	٣ س – ٢ = – (٢ س + ٧)
٣ س – ٢ = ٢ س + ٧	٣ س – ٢ = –٢ س – ٧
٣ س – ٢ س = ٧ + ٢	٣ س + ٢ س = –٧ + ٢
س = ٩	٥ س = –٥
	س = –١

وحيث أن : س = ٩ ، س = –١ تحققان المعادلة

إذن مجموعة الحل هى : { ٩ ، –١ }

قاعدة [٣] :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

(i) | أ ب | = | أ | . | ب |

(ii) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ **، ب ≠ صفر**

مثال (١٩) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$$\left|\frac{2س+1}{3}\right| = |٣ س - ٧|$$

الحل :

باستخدام القاعدة (٣) (ii) نجد أن :

$$\left|\frac{2س+1}{3}\right| = |٣ س - ٧|$$

$$\frac{|2س+1|}{|3|} = |٣ س - ٧|$$

$$\frac{|2س+1|}{3} = |٣ س - ٧|$$

$$|٢ س + ١| = ٣ \; |٣ س - ٧|$$

من قاعدة (٢) نجد أن :

٢ س + ١ = ٣ (٣ س - ٧)	٢ س + ١ = -٣ (٣ س - ٧)
٢ س + ١ = ٩ س - ٢١	٢ س + ١ = -٩ س + ٢١

٢ س − ٩ س = −٢١ − ١

−٧ س = −٢٢

س = $\frac{22}{7}$

٢ س + ٩ س = ٢١ − ١

١١ س = ٢٠

س = $\frac{20}{11}$

وحيث أن س = $\frac{22}{7}$ ، س = $\frac{20}{11}$ تحققان المعادلة

فإن مجموعة الحل هى : { $\frac{22}{7}$، $\frac{20}{11}$ }

مثال (٢٠) :

حل المعادلة :

| ٢ س − ٧ | + ٤ = صفر

الحل :

| ٢ س − ٧ | + ٤ = صفر

| ٢ س − ٧ | = − ٤

وحيث أن | ٢ س − ٧ | لا يمكن أن تساوى قيمة سالبة طبقاً لتعريف القيمة المطلقة (| س | ≤ صفر) فإن هذه المعادلة ليس لها حل.

قاعدة [٤] :

| س | = $\sqrt{س^2}$ حيث س عدد حقيقى

وعلى سبيل المثال :

| ٥ | = $\sqrt{5^2}$ = $\sqrt{25}$ = ٥

| −٣ | = $\sqrt{(-3)^2}$ = $\sqrt{9}$ = ٣

| س + ٣ | = $\sqrt{(س+3)^2}$ = س + ٣

نظرية [١] :

إذا كان أ عدد حقيقى أكبر من الصفر (أ > صفر) فإن :

| س | < أ ⟺ – أ < س < أ

حيث ⟺ يعنى (إذا و إذا فقط) وهى تعنى أنه إذا تحقق الشرط يتحقق الجواب وإذا تحقق الجواب يتحقق الشرط أيضاً (علاقة من طرفين).

مثال (٢١) :

حل المتباينة :

| ٢ س – ٣ | < ٩

الحل :

بتطبيق نظرية (١) نجد أن :

– ٩ < ٢ س – ٣ < ٩

–٩ < ٢ س – ٣

–٩ + ٣ < ٢ س

–٦ < ٢ س

–٣ < س

٢ س – ٣ < ٩

٢ س < ٩ + ٣

٢ س < ١٢

س < ٦

أى أن –٣ < س < ٦

مثال (٢٢) :

حل المتباينة :

| ٢ س – ٣ | > س – ٤

الحل :

| ٢ س – ٣ | < س – ٤

طبقاً لنظرية (١) نجد أن :

– (س – ٤) < ٢ س – ٣ < س – ٤

– س + ٤ < ٢ س – ٣ < س – ٤

– س + ٤ < ٢ س – ٣

– س – ٢ س < – ٣ – ٤

– ٣ س < – ٧

٣ س > ٧

س > $\frac{7}{3}$

٢ س – ٣ < س – ٤

٢ س – س < – ٤ + ٣

س < – ١

وباختبار النقط داخل الفترة س > $\frac{7}{3}$ نجد أن جميع هذه النقط لا تحقق المتباينة وكذلك بالنسبة للفترة س < – ١ وبالتالى لا يوجد حل لهذه المتباينة.

ملحوظة هامة :

عند حل المتباينات والمعادلات التى تحتوى على قيم مطلقة يجب التحقق من الحل.

نظرية [٢] :

إذا كان أ عدد حقيقى أكبر من الصفر (أ > صفر) فإن :

| س | > أ ⇔ س > أ أو س < – أ

مثال (٢٣) :

حل المتباينة :

| ٢ – ٣ س | > ٧

الحل :

طبقا لنظرية (٢) نجد أن :

$$|\,٢ - ٣\,س\,| > ٧$$

$٢ - ٣\,س > ٧$	$٢ - ٣\,س < -٧$
$-٣\,س > ٧ - ٢$	$-٣\,س < -٧ - ٢$
$-٣\,س > ٥$	$-٣\,س < -٩$
$س < -\frac{5}{3}$	$س > ٣$

إذن مجموعة الحل $]-\infty \,،\, -\frac{5}{3}[\;\cup\;]٣ \,،\, \infty[$

ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد كالآتى :

$-\infty$ $\quad -\frac{5}{3}$ $\quad$ صفر $\quad ٣ \quad +\infty$

مثال (٢٤) :

أوجد مجموعة الحل للمتباينة :

$$|\,٥ - ٢\,س\,| + ٥ \le \text{صفر}$$

الحل :

يمكن إعادة صياغة المتباينة كما يلى :

$$|\,٥ - ٢\,س\,| \le -٥$$

وبتطبيق نظرية (٢) نجد أن :

٥ − ٢ س ≤ − ٥
− ٢ س ≤ − ٥ − ٥
٢ س ≤ − ١٠
س ≥ ٥

أو

٥ − ٢ س ≥ − (−٥)
٥ − ٢ س ≥ ٥
− ٢ س ≥ ٥ − ٥
− ٢ س ≥ صفر
س ≤ صفر

مجموعة الحل لهذه المتباينة هى اتحاد الفترتين س ≤ صفر ، س ≥ ٥
أى أن مجموعة الحل هى [صفر ، ∞ [∪] − ∞ ، ٥] وهى تساوى جميع الأعداد الحقيقية. إذن أى عدد حقيقى يحقق هذه المتباينة.

تمارين على الباب الثانى

أوجد مجموعة الحل للمتباينات الخطية الآتية :

(١) ٧ + ٢ س < ١٠

(٢) ٥ − ٣ س ≥ ٤

(٣) ٣ ص + ٥ < ٢ ص − ١

(٤) ٩ ص + ١ ≤ ١٣ − ٢ ص

(٥) ٢ (٣ س + ١) < ٦ + ٣ (س + ١)

(٦) س + $\frac{1}{3}$ < $\frac{س - 2}{4}$ − ١

(٧) $\frac{1}{5}$ (٢ س − ١) − س > $\frac{س}{2} - \frac{1}{3}$

(٨) ٤ ≥ $\frac{5س - 1}{3}$ > ٧

(٩) ٢ (٣ س − ٢) ≥ ٣ (٢ س + ١)

(١٠) ٤ + ٢ س < ٣ س − ١ ≥ ٢ س + ١

(١١) ٦ س + ٥ < ٢ س − ١ ≥ ٧ + ٥ س

(١٢) ١٣ − ٤ س < ٥ − ٢ س < ٢ س + ٥

أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية :

(١٣) (س − ٢) (س − ٥) < صفر

(١٤) س^{٢} + ٢ س + ١ < صفر

(١٥) س^{٢} − ٦ س > − ١٣

(١٦) (س − ٢)^{٢} ≤ − ٥

(١٧) (١ − ٣ س) (س + ٢) < (س + ٣) (٣ − ٢ س)

(١٨) س^{٢} ≥ ٦ س − ٩

(١٩) (س − ٣) (س + ٢) + س ≤ ٢

(٢٠) ٣ س^{٢} ≤ ١١ س + ٤

(٢١) س (س + ٢) − ٣ ≤ صفر

(٢٢) س^{٢} + ١٤ > ٩ س

(٢٣) س (س + ١) − ٢ ≥ صفر

(٢٤) (٢ س − ٥) ≥ $\frac{1}{س + 3}$

(٢٥) س^{٢} − ٤ س + ٤ ≥ صفر

(٢٦) س^{٢} − ١ ≤ صفر

(٢٧) ٧ + س^{٢} − ٤ س > صفر

(٢٨) إذا كان سعر بيع الوحدة من منتج ما هو (ع) جنيهاً، ع تحدد بالعلاقة : ع = ٦٠٠ − ٥ س، حيث س هو عدد الوحدات المنتجة أسبوعياً. فما هو عدد الوحدات من هذا المنتج التى يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقيق إيراد قدره ١٨ ألف جنيه على الأقل ؟

(٢٩) ينتج مصنع ٦ أكتوبر للأوانى المعدنية (س) من الوحدات أسبوعياً. فإذا كان سعر بيع الوحدة هو (ع) جنيهاً حيث ع = ٢٠٠ − س. فإذا علمت أن خطة الإنتاج فى هذا المصنع تهدف إلى تحقيق إيراد أسبوعى قدره ٩٩٠٠ جنيه على الأقل، فما هو سعر بيع الوحدة الذى يحقق هذا الهدف؟

حل المعادلات الآتية :

(٣٠) | ٣ − ٧ س | = ٤

(٣١) | س + ٢ | = | ٣ − س |

(٣٢) | ٣ س − ٢ | = ٢ − س

(٣٣) | س − ٣ | + ٧ = صفر

(٣٤) | س + ٣ | = ٥ − س

(٣٥) $\left|\dfrac{-5\text{س} - 2}{\text{س}+3}\right| = ٥$

(٣٦) $\left|\dfrac{\text{س} - 3}{3\text{س} - 5}\right| = ٦$

(٣٧) $\left|3 - \dfrac{1}{\text{س} - 2}\right| = ٧$

(٣٨) $\left|\dfrac{1}{\text{ص}} - 3\right| = ٤$

(٣٩) | ٢ ص + ٥ | = ٧

(٤٠) $\left|\dfrac{2\text{ص}+1}{3}\right|$ = | ٣ ص − ٧ |

حل المتباينات الآتية :

(٤١) | ٣ س + ٧ | < ٤

(٤٢) | ٢ − ٥ س | > ٣

(٤٣) ٥ + ٢ | ٣ − ٢ س | < ٧

(٤٤) ٧ + | ٣ س − ٥ | ≥ ٥

(٤٥) | ٢ س − ٦ | ≤ ٣

(٤٦) | ٣ س − ١٣ | + ٦ ≥ صفر

(٤٧) $\frac{5\text{س} - 2}{4} \geq ٣$

(٤٨) | ٢ س − ٣ | + | ٧ + ٣ س | > صفر

(٤٩) $\frac{2\text{س} - 3}{7} \leq ١$

(٥٠) | ٢ س − ٣ | ≥ ٧

(٥١) تبيع محلات الأنوار للحلويات قطعة الجاتوه الممتاز بمبلغ ١٥ جنيهاً. فإذا علمت أن إنتاج القطعة الواحدة يكلف الشركة مواد خام وأجور عمال قدرها ٨ جنيهات بالإضافة إلى تكلفة ثابتة قدرها ٤٠٠٠ جنيه أسبوعياً. أحسب عدد قطع الجاتوه التى يجب أن تبيعها الشركة لكى تحقق ربحاً قدره ٣٠٠٠ جنيه على الأقل فى الأسبوع.

(٥٢) إذا كان مصنع الأزهار للملابس الجاهزة يستطيع إنتاج س قميص بسعر القميص ع جنيهاً، ع تتحدد بالعلاقة ٢ ع + ٣ س = ٢٠٠. حدد سعر بيع القميص الذى يحقق للمصنع إيراداً قدره ١٦٠٠ جنيه على الأقل.