الباب الثالث

الدوال   الخطية

Linear Functions

الباب الثالث

الدوال الخطية

Linear functions

مقـدمة :

تعرف الدالة بأنها علاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل (يتغير أولاً) والآخر متغير تابع (يتغير ثانياً). فمن المعروف أن مستوى معيشة الفرد يتوقف على ما يحصل عليه الفرد من دخل. فإذا زاد دخل الفرد أدى ذلك إلى ارتفاع مستوى معيشته والعكس ليس صحيحاً. معنى هذا أن هناك علاقة دالية بين مستوى المعيشة ودخل الفرد. فالدخل متغير مستقل (يتغير أولاً) ومستوى المعيشة متغير تابع، أى يتغير تبعاً للتغير فى الدخل. لذلك نستطيع القول بأن مستوى المعيشة دالة فى الدخل فضلاً عن ذلك فإن العلاقة بين ثمن سلعة، والطلب عليها هى علاقة دالية أيضاً فإذا ارتفع سعر السلعة قل الطلب عليها (انصرف الناس عن شرائها) وإذا انخفض سعرها فإن الطلب عليها يزداد. معنى هذا أن الطلب على السلعة يتحدد تبعاً لسعرها؛ إذن فسعر السلعة متغير مستقل والطلب عليها متغير تابع ولذلك نقول أن الطلب على سلعة ما هو دالة فى سعر هذه السلعة.

والدالة فى صورتها العامة تأخذ الشكل :

ص = د (س)

وتقرأ : (ص) دالة فى (س). أى أن التغير فى ص يتبع التغير الذى يطرأ على (س). لذلك فإن س يسمى المتغير المستقل، (ص) يسمى المتغير التابع.

وإذا كان المتغير التابع (ص) يعتمد فى تغيره على المتغيرين س١، س٢ فإن الصورة العامة للدالة تأخذ الشكل :

ص = د (س١ ، س٢)

وتقرأ : (ص) دالة فى (س١ ، س٢)، بمعنى أن التغير الذى يطرأ على (ص) مرتبط بالتغير الذى يطرأ على كل من (س١ ، س٢).

وإذا كان المتغير (ص) يعتمد على ٣ متغيرات مستقلة (س١ ، س٢ ، س٣) فإن شكل الدالة يكون على الصورة :

ص = د (س١ ، س٢ ، س٣)

وبصفة عامة إذا كان المتغير التابع (ص) يتأثر بمجموعة من المتغيرات المستقلة عددها (ن) فإن الصورة العامة للدالة تأخذ الشكل :

ص = د (س١ ، س٢ ، ... ، سن)

هذا وتتميز الدالة الخطية بالخصائص الآتية :

١- أنها دالة من الدرجة الأولى.

٢- تمثل بيانياً بخط مستقيم.

٣- تأخذ الشكل العام :

ص = م س + جـ

حيث : ص = المتغير التابع

، س = المتغير المستقل

، م = ميل الخط المستقيم

، جـ = الجزء المقطوع من محور الصادات

وتعرف م ، جـ بمعالم الدالة الخطية.

ميل الخط المستقيم : The Slope

يعرف ميل الخط المستقيم بأنه ظل الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(i) إذا كان الخط الممثل للدالة الخطية يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ظل الزاوية يكون موجباً وبالتالى يكون الميل موجباً.

(ii) إذا كان الخط الممثل للدالة الخطية يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، يكون ظل الزاوية سالباً وبالتالى يكون ميل الخط سالباً.

(iii) إذا كان الخط الممثل للدالة عمودياً على محور السينات كانت الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى ٩٠ ْ ويكون ظل الزاوية غير معرف وبالتالى لا يوجد ميل للخط فى هذه الحالة.

(iv) إذا كان الخط الممثل للدالة يوازى محور السينات كانت الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مستقيمة ١٨٠ ْ ويكون ظل الزاوية يساوى صفراً وبالتالى يكون الميل مساوياً للصفر.

الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) :

(i) إذا كان الخط الممثل للدالة الخطية يقع فوق نقطة الأصل، تكون قيمة (جـ) موجبة.

(ii) إذا كـان الخـط الممثـل للدالـة الخطيـة يمـر بنطقـة الأصـل تكـون جـ = صفر.

(iii) أما إذا كان الخط الممثل للدالة الخطية يقع تحت نقطة الأصل فإن قيمة (جـ) تكون سالبة.

مثال (١) :

إذا كانت العلاقة بين دخل الفرد اليومى والاستهلاك المناظر تأخذ الشكل

ص = ٠,٥ س + ٣

والمطلوب تمثيل هذه الدالة بيانياً.

الحل :

فى هذه العلاقة نجد أن الاستهلاك دالة فى الدخل، بمعنى أن الاستهلاك متغير تابع (ص) ودخل الفرد متغير مستقل (س).

ولتمثيل هذه الدالة بيانياً نفرض بعض القيم للمتغير المستقل (س) ونوجد قيم المتغير التابع (ص) المناظرة لها كالآتى :

عندما س = -٣

ص = ٠,٥ (-٣) + ٣ = ١,٥

عندما س = -٢

ص = ٠,٥ (-٢) + ٣ = ٢

عندما س = -١

ص = ٠,٥ (-١) + ٣ = ٢,٥

عندما س = صفر

ص = ٠,٥ (صفر) + ٣ = ٣

عندما س = ١

ص = ٠,٥ (١) + ٣ = ٣,٥

عندما س = ٢

ص = ٠,٥ (٢) + ٣ = ٤

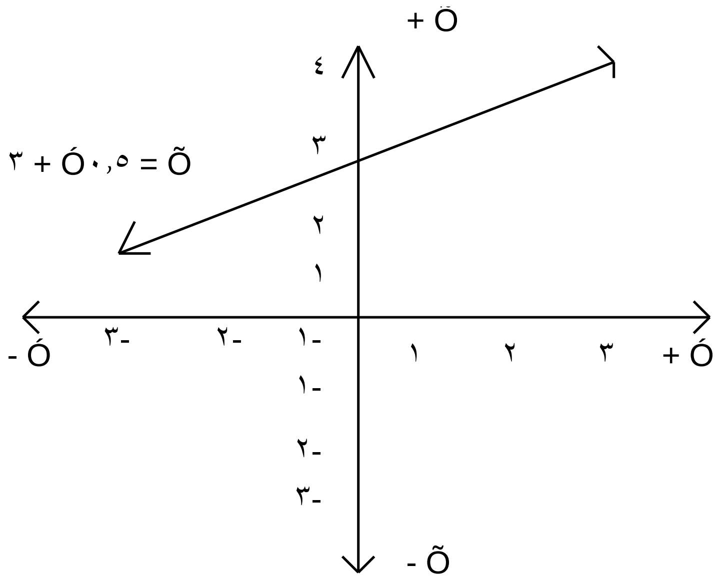
عندما س = ٣

ص = ٠,٥ (٣) + ٣ = ٤,٥

ثم نلخص النتائج فى جدول كالآتى :

س	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣
ص	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤	٤,٥

ثم نقوم برسم محورى الإحداثيات الأفقية والرأسية لتمثيل هذه الدالة بيانياً وذلك كما هو موضح بالشكل التالى.



شكل رقم (١)

التفسير الاقتصادى للدالة :

ص = ٠,٥ س + ٣

ميل هذا الخط (م) = ٠,٥

معناه الاقتصادى أن ما ينفقه الفرد على الاستهلاك يمثل ٥٠% من دخله. فالميل يعبر عن معدل التغير فىالاستهلاك الناتج عن التغير فى الدخل.

الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) = ٣

معناه الاقتصادى أن الحد الأدنى لاستهلاك الفرد اليومى يساوى ٣ وحدات نقدية حتى عند مستوى الدخل صفر وذلك مع ثبات باقى العوامل المؤثرة على الاستهلاك.

إيجاد ميل الخط المستقيم :

(i) إذا كان الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية يميل بزاوية ما على الاتجاه الموجب لمحور السينات وليكن قياسها θ درجة فإن الميل (م) = ظا θ

(ii) إذا كان الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية يمر بنقطتين معلومتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) فإن الميل يعرف كالآتى :

$$\textbf{الميل (م)} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال (٢) :

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥)

الحل :

(س١ ، ص١) = (١ ، ٣)

(س٢ ، ص٢) = (٢ ، ٥)

$$\text{الميل (م)} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{5-3}{2-1} = ٢$$

حيث أن م = ٢ (مقدار موجب) فإن هذا الخط يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

مثال (٣) :

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين :

(-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

الحل :

(س١ ، ص١) = (-١ ، ٣)

(س٢ ، ص٢) = (٥ ، ٣)

$$\text{الميل (م)} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{3-3}{5-(-1)} = \frac{\text{صفر}}{5+1} = \frac{\text{صفر}}{6} = \text{صفر}$$

وحيث أن م = صفر فإن الخط الممثل لهذه الدالة يوازى محور السينات.

مثال (٤) :

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يربط بين النقطتين (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥)

الحل :

(س١ ، ص١) = (٣ ، ٤)

(س٢ ، ص٢) = (٣ ، ٥)

$$\text{الميل (م)} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{5-4}{3-3} = \frac{1}{\text{صفر}}$$

وهذه قيمة غير معرفة ولذلك فإن هذا الخط ليس له ميل، وبالتالى فهو يصنع زاوية قائمة مع محور السينات.

الطرق المختلفة لإيجاد معادلة الخط المستقيم :

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بعدة طرق منها :

أولاً : بمعلومية نقطتين :

يمكن تحديد الدالة الخطية الممثلة للخط المستقيم بمعلومية نقطتين يمر بهما هذا الخط. فإذا فرض أن الخط المستقيم يمر بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢ ، ص٢) فإن معادلة ذلك الخط تعرف كالآتى :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال (٥) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين :

(١ ، ٣) ، (−٢ ، ١)

الحل :

(س١، ص١) = (١ ، ٣)

(س٢، ص٢) = (−٢ ، ١)

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ص - 3}{س - 1} = \frac{1 - 3}{-2 - 1}$$

$$\frac{ص - 3}{س - 1} = \frac{-2}{-3}$$

−٣ (ص − ٣) = −٢ (س − ١)

−٣ ص + ٩ = −٢ س + ٢

-٣ ص $= -٢$ س $+ ٢ - ٩$

-٣ ص $= -٢$ س $- ٧$

بقسمة طرفى المعادلة على (-٣) نجد أن :

$$\text{ص} = \frac{2}{3}\text{س} + \frac{7}{3}$$

لاحظ أن ميل هذا الخط (م) = $\frac{2}{3}$ أى موجب لذلك فالخط الممثل لهذه الدالة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. كما نلاحظ أن الجزء الذى يقطعه هذا الخط من محور الصادات (جـ) = $\frac{7}{3}$ أى موجب لذلك فالخط المستقيم يقع فوق نقطة الأصل.

مثال (٦) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، -٣) ، (٢ ، ٣)

الحل :

$(\text{س}_١ ، \text{ص}_١) = (٥ ، -٣)$

$(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢) = (٢ ، ٣)$

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{\text{ص} - (-3)}{\text{س} - 5} = \frac{3 - (-3)}{2 - 5}$$

$$\frac{\text{ص} + 3}{\text{س} - 5} = \frac{3 + 3}{-3}$$

$$\frac{ص + 3}{س - 5} = \frac{6}{-3}$$

−٣ (ص + ٣) = ٦ (س − ٥)

−٣ ص − ٩ = ٦ س − ٣٠

−٣ ص = ٦ س − ٣٠ + ٩

−٣ ص = ٦ س − ٢١

ص = −٢ ص + ٧

ثانياً : بمعلومية ميل الخط ونقطة تقع عليه :

إذا علم ميل الخط المستقيم (م) ونقطة تقع عليه ولتكن (س١ ، ص١) ، فإنه يمكن إيجاد معادلة هذا الخط باستخدام الصورة التالية :

ص − ص١ = م (س − س١)

مثال (٧) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله (م) = −٣ ويمر بالنقطة (٢ ، ٥)

الحل :

م = −٣ ، (س١ ، ص١) = (٣ ، −٥)

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − (−٥) = −٣ (س − ٢)

ص + ٥ = −٣ س + ٦

ص = −٣ س + ٦ − ٥

ص = −٣ س + ١

مثال (٨) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (−١ ، ٢) وميله يساوى ٢.

الحل :

م = ٢ ، (س١ ، ص١) = (-١ ، ٢)

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٢ = ٢ [س - (-١)]

ص -٢ = ٢ (س + ١)

ص - ٢ = ٢ س + ٢

ص = ٢ س + ٤

ثالثاً : بمعلومية ميل الخط المستقيم والجزء الذى يقطعه من محور الصادات :

إذا علم ميل الخط المستقيم (م) والجزء الذى يقطعه هذا الخط من المحور الرأسى (جـ) فإنه يمكن إيجاد معادلة هذا الخط باستخدام العلاقة :

ص = م س + جـ

مثال (٩) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً طوله ٥ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

الحل :

م = $\frac{1}{3}$ ، جـ = ٥

ص = م س + جـ

$$ص = \frac{1}{3} س + ٥$$

مثال (١٠) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $-\frac{1}{2}$ ويمر بنقطة الأصل.

الحل :

حيث أن هذا الخط يمر بنقطة الأصل فإن :

جـ = صفر وتكون معادلته

$$ص = -\frac{1}{2} س$$

إيجاد معالم الخط المستقيم إذا علمت معادلته :

إذا كان لدينا معادلة الخط المستقيم :

$$\textbf{أ س + ب ص + جـ = صفر}$$

فإنه يمكننا إيجاد معالم هذا الخط؛ بمعنى أنه يمكن إيجاد ميل هذا الخط، والجزء الذى يقطعه من المحور الرأسى وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

(i) نجعل الحد الذى يحتوى على (ص) فى الطرف الأيمن وباقى الحدود فى الطرف الأيسر مع تغيير إشارة الحد الذى ينقل من طرف إلى آخر.

$$\textbf{ب ص = - أ س - جـ}$$

(ii) نقسم طرفى المعادلة على معامل ص (أى على ب).

$$\textbf{ص} = -\frac{أ}{ب} س - \frac{جـ}{ب}$$

فيكون الميل (م) $= -\frac{أ}{ب}$

مثال (١١) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للخط المستقيم الذى معادلته.

$$٣ س + ٢ ص + ٦ = صفر$$

الحل :

نجعل الحد الذى يحتوى على (ص) بالطرف الأيمن وباقى الحدود بالطرف الأيسر

$$٢ ص = -٣ س - ٦$$

بقسمة طرفى المعادلة على (٢)

$$ص = -\frac{3}{2} س - ٣$$

$$\text{أى أن : الميل (م)} = -\frac{3}{2}$$

فى هذه الحالة الخط المستقيم الممثل لهذه المعادلة يقع أسفل نقطة الأصل، ويقطع المحور الرأسى عند النقطة (٠ ، -٣).

مثال (١٢) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للخط المستقيم الذى معادلته

$$\frac{س}{5} + \frac{ص}{4} = ١$$

الحل :

بضرب طرفى المعادلة فى (٢٠)

$$٤ س + ٥ ص = ٢٠$$

$$٥ ص = -٤ س + ٢٠$$

بقسمة طرفى المعادلة على (٥)

$$ص = -\frac{4}{5} س + ٤$$

أى أن الميل (م) $= -\frac{4}{5}$ ، جـ = ٤

وفى هذه الحالة يقع الخط المستقيم أعلى نقطة الأصل.

توازى خطين مستقيمين : Parallel of two Lines

إذا كان لدينا المعادلتان الممثلتان للخطين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$

حيث : $ل_١$: ص = $م_١$ س + $جـ_١$

$ل_٢$: ص = $م_٢$ س + $جـ_٢$

فإن : **$ل_١ // ل_٢$ إذا و إذا فقط كان $م_١$ = $م_٢$**

تعامد خطين مستقيمين : Perpendicular of two Lines

إذا كان لدينا المعادلتان :

$ل_١$: ص = $م_١$ س + $جـ_١$

$ل_٢$: ص = $م_٢$ س + $جـ_٢$

تمثلان الخطين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن :

$ل_١ \perp ل_٢$ ($ل_١$ عمودياً على $ل_٢$)

إذا وإذا فقط كان **$م_١ \times م_٢ = -١$**

مثال (١٣) :

أثبت أن الخطين الآتيين متعامدان :

ل١ : ٢ س + ٣ ص = ٦

ل٢ : ٣ س − ٢ ص = ٦

الحل :

نفرض أن م١ هو ميل الخط ل١

٢ س + ٣ ص = ٦

٣ ص = −٢ س + ٦

ص = $\frac{-2}{3}$ س + ٢

أى أن م١ = $\frac{-2}{3}$

نفرض أن م٢ هو ميل الخط ل٢

٣ س − ٢ ص = ٦

−٢ ص = −٣ س + ٦

ص = $\frac{3}{2}$ س − ٣

أى أن م٢ = $\frac{3}{2}$

وحيث أن م١ × م٢ = $\frac{-2}{3} \times \frac{3}{2}$ = −١

فإن الخطين ل١ ، ل٢ متعامدان (ل١ $\perp$ ل٢)

مثال (١٤) :

أثبت أن الخطين الآتيين متوازيان.

$ل_{١}$: ٤ س + ٢ ص = ١

$ل_{٢}$: ص − ٢ + ٢ س = صفر

الحل :

نفرض أن $م_{١}$ هو ميل الخط الأول.

٤ س + ٢ ص = ١

٢ ص = −٤ س + ١

ص = −٢ س + $\frac{1}{2}$

أى أن $م_{١}$ = −٢

نفرض أن $م_{٢}$ هو ميل الخط الثانى.

ص − ٢ + ٢ س = صفر

ص = −٢ س + ٢

أى أن $م_{٢}$ = −٢

وحيث أن $م_{١}$ = $م_{٢}$ = −٢

إذن $ل_{١}$ يوازى $ل_{٢}$ ($ل_{١}$ // $ل_{٢}$)

المعادلات الخطية فى متغيرين :

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطية الآتى :

$أ_{١}$ س + $ب_{١}$ ص = $جـ_{١}$

$أ_{٢}$ س + $ب_{٢}$ ص = $جـ_{٢}$

فإنه يمكن حل هذا النظام بإحدى الطرق الثلاثة التى سبق لنا تناولها فى الباب الأول من هذا الكتاب وهى :

١- الطريقة البيانية
٢- طريقة الحذف
٣- طريقة التعويض

ولكن السؤال الذى يفرض نفسه الآن هو هل مثل هذا النظام من المعادلات الخطية فى متغيرين له حل دائماً ؟ وللإجابة على هذا السؤال نقول : إن نظام المعادلات الخطية فى متغيرين قد يكون له حل وحيد Unique solution ، وقد يكون له عدد لانهائى من الحلول Infinite number of solutions ، وقد لا يكون له حل مطلقاً.

وبالتالى فإنه عند تناولنا لأى نظام من المعادلات الخطية فى متغيرين يكون لدينا الحالات الآتية :

(١) يكون للنظام حل وحيد إذا كان $م_١ \neq م_٢$.
(٢) يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول إذا كان $م_١ = م_٢$ ، $جـ_١ = جـ_٢$.
(٣) لا يكون للنظام حل إذا كان $م_١ = م_٢$ ، $جـ_١ \neq جـ_٢$.

والأمثلة التالية توضح هذه الحالات الثلاثة.

مثال (١٥) :

أوجد عدد حلول نظام المعادلات الآتى :

٢ س + ٣ ص = ١
س + ٥ ص + ٤ = صفر

الحل :

لإيجاد عدد حلول النظام نوجد ميل كل خط وكذا الجزء المقطوع من محور الصادات :

(i)　　٢ س + ٣ ص = ١

٣ ص = −٢ س + ١

$$ص = \frac{-2}{3} س + \frac{1}{3}$$

$$م_١ = \frac{-2}{3} \quad ، \quad جـ_١ = \frac{1}{3}$$

(ii)　　س + ٥ ص + ٤ = صفر

٥ ص = − س − ٤

$$ص = - \frac{1}{5} س - \frac{4}{5}$$

$$م_٢ = - \frac{1}{5} \quad ، \quad جـ_٢ = \frac{4}{5}$$

وحيث أن $م_١ \neq م_٢$ فإن النظام له حل وحيد.

ملحوظة :

على الطالب التحقق من ذلك باستخدام إحدى الطرق التى درسها.

مثال (١٦) :

أوجد عدد الحلول لنظام المعادلات الآتى :

س + ٣ ص + ٢ = صفر

٢ س = ٥ − ٦ ص

الحل :

لإيجـاد عـدد حلـول النظـام نوجـد الميـل والجـزء المقطـوع مـن محـور الصادات لكل معادلة على حدة.

(i)   س + ٣ ص + ٢ = صفر

٣ ص = − س − ٢

$$ص = -\frac{1}{3} س - \frac{2}{3}$$

$$م_١ = -\frac{1}{3} \quad ، \quad جـ_١ = \frac{2}{3}$$

(ii)   ٢ س = ٥ − ٦ ص

٦ ص = −٢ س + ٥

$$ص = -\frac{1}{3} س + \frac{5}{6}$$

$$م_٢ = \frac{-1}{3} \quad ، \quad جـ_٢ = \frac{5}{6}$$

أى أن $م_١ = م_٢$ ، $جـ_١ \neq جـ_٢$

وبالتالى لا توجد أية حلول لهذا النظام.

مثال (١٧) :

أوجد عدد الحلول لنظام المعادلات الآتى :

٣ س = ٢ ص − ٤

−٤ ص = − ٦ س − ٨

الحل :

(i)   ٣ س = ٢ ص − ٤

$$-٢ ص = -٣ س - ٤$$

$$ص = \frac{3}{2} س + ٢$$

$$م_{١} = \frac{3}{2} \quad ، \quad جـ_{١} = ٢$$

(ii) $$-٤ ص = -٦ س - ٨$$

$$ص = \frac{3}{2} س + ٢$$

$$م_{٢} = \frac{3}{2} \quad ، \quad جـ_{٢} = ٢$$

وحيث أن $م_{١} = م_{٢}$ ، $جـ_{١} = جـ_{٢}$

فإن النظام له عدد لانهائى من الحلول.

تطبيقات اقتصادية وتجارية :

فى هذا الجزء سوف نتناول بعض التطبيقات الاقتصادية والتجارية التى تعتمد على معادلة الخط المستقيم. فعلى سبيل المثال فالتكاليف الكلية يمكن صياغتها فى صورة علاقة دالية كالآتى :

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

فإذا رمزنا للتكاليف الكلية بالرمز (ت) والتكاليف المتغيرة للوحدة بالرمز (م)، وعدد الوحدات المنتجة بالرمز (س) والتكاليف الثابتة بالرمز (جـ) فان معادلة التكاليف تأخذ الشكل :

$$\textbf{ت = م س + جـ}$$

وتسمى هذه المعادلة نموذج التكلفة الخطية.

مثال (١٨) :

إذا كانت تكلفة ١٥ وحدة من منتج ما هى ٣٠٠ جنيه، وتكلفة ٢٠ وحدة من نفس المنتج هى ٤٥٠ جنيه. أوجد العلاقة الخطية بين التكاليف (ت) وعدد الوحدات (س) ثم استخدم هذه العلاقة للتنبؤ بتكلفة إنتاج ٣٠ وحدة من نفس المنتج.

الحل :

عدد الوحدات (س)	التكلفة (ت)
١٥	٣٠٠
٢٠	٤٥٠

أى أنه يوجد لدينا نقطتان تقعان على خط التكاليف هما :

$$(س_1 \text{ ، } ت_1) = (15 \text{ ، } 300)$$

$$(س_2 \text{ ، } ت_2) = (20 \text{ ، } 450)$$

وبالتالى فإن المعادلة الخطية للتكاليف تكون كالتالى :

$$\frac{ت - ت_1}{س - س_1} = \frac{ت_2 - ت_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ت - 300}{س - 15} = \frac{450 - 300}{20 - 15}$$

$$\frac{ت - 300}{س - 15} = \frac{150}{5}$$

$$\frac{ت - 300}{س - 15} = \frac{30}{1}$$

ت – ٣٠٠ = ٣٠ س – ٤٥٠

ت = ٣٠ س – ٤٥٠ + ٣٠٠

ت = ٣٠ س – ١٥٠

وللتنبؤ بتكلفة الإنتاج لعدد ٣٠ وحدة .

ت = ٣٠ (٣٠) – ١٥٠

= ٩٠٠ – ١٥٠

= ٧٥٠ جنيهاً

مثال (١٩) :

تاجر يبيع ٢٠ عبوة سبراى بسعر العبوة ٢٥ جنيها. وإذا انخفض سعر بيع العبوة إلى ٢٠ جنيهاً فإنه يبيع ٣٠ عبوة. حدد معادلة الطلب الخطية.

الحل :

عدد الوحدات المباعة (س)	سعر بيع الوحدة (ع)
٢٠	٢٥
٣٠	٢٠

أى يوجد لدينا نقطتان على خط الطلب هى :

$(ع_{١} ، س_{١}) = (٢٥ ، ٢٠)$

$(ع_{٢} ، س_{٢}) = (٢٠ ، ٣٠)$

إذن معادلة الطلب هى :

$$\frac{س - س_1}{ع - ع_1} = \frac{س_2 - س_1}{ع_2 - ع_1}$$

$$\frac{س - 20}{ع - 25} = \frac{30 - 20}{20 - 25}$$

$$\frac{\text{س} - 20}{\text{ع} - 25} = \frac{10}{-5}$$

−٥ (س − ٢٠) = ١٠ (ع − ٢٥)

−٥ س + ١٠٠ = ١٠ ع − ٢٥٠

−١٠ ع = ٥ س − ١٠٠ − ٢٥٠

−١٠ ع = ٥ س − ٣٥٠

بقسمة طرفى المعادلة على (−١٠)

$$\text{ع} = -\frac{1}{2}\,\text{س} + ٣٥$$

حيث (ع) سعر السلعة، (س) كمية الطلب المناظرة لهذا السعر.

مثال (٢٠) :

إذا كانت تكلفة الوحدة فى مصنع للعب الأطفال من العمالة والمواد الخام هو ١٥ جنيهاً، والتكاليف الثابتة ٢٠٠٠ جنيه. فإذا كان سعر بيع الوحدة هو ٢٠ جنيهاً. أوجد عدد الوحدات التى يجب بيعها عند نقطة التعادل.

الحل :

تعرف نقطة التعادل بأنها النقطة التى يتساوى عندها الإيراد والتكاليف؛ أى أن نقطة التعادل هى النقطة التى عندها لا تحقق الشركة ربحاً ولا خسارة.

ولنفرض أن عدد الوحدات = س وحدة

وأن التكاليف الكلية لإنتاج س وحدة = ت

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

ت = ١٥ س + ٢٠٠٠

الايراد = عدد الوحدات × سعر بيع الوحدة

ى = ٢٠ س

عند نقطة التعادل :

الإيراد = التكاليف

ى = ت

١٥ س + ٢٠٠٠ = ٢٠ س

١٥ س - ٢٠ س = - ٢٠٠٠

- ٥ س = - ٢٠٠٠

س = ٤٠٠ وحدة

إذن يجب على هذا المصنع أن يبيع ٤٠٠ وحدة لكى يحقق نقطة التعادل.

مثال (٢١) :

حدد نقطة توازن السوق بالنسبة لقانونى الطلب والعرض التاليين :

قانون الطلب : ع = ٢٥ - ٢ س ... (١)

قانون العرض : ع = ٣ س + ٥ ... (٢)

الحل :

عدد نقطة توازن السوق :

الطلب = العرض

٢٥ - ٢ س = ٣ س + ٥

-٢ س - ٣ س = ٥ - ٢٥

- ٥ س = -٢٠

س = ٤

إذن كمية التوازن = ٤ وحدات

بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (١)

ع = ٢٥ - ٢ (٤)

= ٢٥ - ٨

= ١٧

أى أن سعر التوازن = ١٧ جنيهاً.

تمارين على الباب الأول

أوجد الميل لكل خط يربط بين كل زوج من النقاط الآتية :

(١) (–١ ، ٢) ، (٣ ، ٧)

(٢) (٣ ، –٢) ، (١ ، –٤)

(٣) (–١ ، ٥) ، (٥ ، ٣)

(٤) (٢ ، ١) ، (٢ ، –١)

أوجد معادلة الخط المستقيم التى تحقق الشروط فى كل مما يأتى :

(٥) يمر بالنقطة (–١ ، ٢) وميله يساوى –٥

(٦) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) وميله يساوى صفر.

(٧) يمر بالنقطتين (–٣ ، ١) ، (٢ ، –١)

(٨) يمر بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (١ ، –٢)

(٩) يمر بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (٣ ، ٦)

(١٠) يمر بالنقطتين (–١ ، ١) ، (١ ، –١)

(١١) ميله يساوى ٠,٥ ويقطع ٥ وحدات من محور الصادات.

(١٢) ميله يساوى –٣ ويمر بنقطة الأصل.

(١٣) ميله يساوى –٠,٢ ويقطع محور الصادات عن النقطة (٠ ، –١)

(١٤) يمر بالنقطة (–٢ ، ١) ويوازى الخط الذى معادلته :

٢ س + ص – ٢ = صفر

(١٥) يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويوازى الخط الذى يربط بين النقطتين

(١ ، ٢) ، (–٣ ، ١)

(١٦) يمر بالنقطة (–٣ ، ٤) ويكون عمودياً على الخط الذى معادلته

٣ س + ٤ ص + ٥ = صفر

(١٧) يمر بالنقطة (٢ ، -٥) ويكون عمودياً على الخط الذى يربط بين النقطتين (١، -٢) ، (٣ ، -٢)

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :

(١٨) $\frac{1}{3}$ س + $\frac{1}{2}$ ص = ٥

(١٩) س - $\frac{ص}{3} = \frac{1}{4}$

(٢٠) ٣ س = ٤ ص - ٤

حدد ما إذا كان كل زوج من الخطوط الآتية متوازى أم متعامد أم غير ذلك ؟

(٢١) ٣ س + ٢ ص - ٦ = صفر

٢ س - ٣ ص - ٦ = صفر

(٢٢) ص - ٢ س - ٣ = صفر

س - ٢ ص - ٣ = صفر

(٢٣) س + ٣ ص + ٢ = صفر

٢ س = ٥ - ٦ ص

أوجد عدد الحلول لكل نظام من المعادلات الآتية :

(٢٤) ٣ س + ٥ ص - ١ = صفر

٤ س - ٢ ص + ٥ = صفر

(٢٥) ٧ س - ٥ = ٣ ص

٣ - ٦ ص = - ١٤ س

(٢٦) ٣ = ٢ س + ص

٩ − ٦ س = − ٣ ص

(٢٧) إذا كـان إنتـاج ٣٠ وحـدة مـن منـتج معـين يكلـف الشـركة ١٥٠ جنيهـاً. تكلفة إنتاج ٢٥ وحدة هى ١٢٠ جنيهاً.

(i) أوجد معادلة التكاليف الخطية.

(ii) ما هى تكلفة إنتاج ٢١ وحدة من نفس النوع ؟

(iii) حدد التكلفة المتغيرة لكل وحدة والتكاليف الثابتة للإنتاج.

(٢٨) بائع أجهزة كهربائية وجد أنـه عندما يبيـع الثلاجة بسعر ٩٠٠ جنيـه فإنـه يبيـع ٢٠٠٠ ثلاجـة فـى الشـهر. وإذا كـان سـعر بيـع الثلاجـة ٨٠٠ جنيـه فإنه يبيع ٢٥٠٠ ثلاجة. أوجد معادلة الطلب الخطية.

(٢٩) إذا كان سعر بيع الوحدة من منتج معين ٥٠ جنيهاً، يكون حجم الطلب على هذه السلعة ٤٥٠٠ وحدة بينما يكون المعروض منها ٣٣٠٠ وحدة وإذا زاد سعر بيع الوحدة إلى ٦٠ جنيهاً سيكون الطلب والعرض ٤٤٠٠ ، ٤٢٠٠ وحدة على الترتيب.

(i) أوجد قانونى الطلب والعرض الخطيين.

(ii) أوجد نقطة توازن السوق.

(٣٠) إذا كانـت التكلفـة الثابتـة فـى مصـنع الملابس الجـاهزة هـى مبلـغ ٢٥٠٠ جنيه وكانت التكاليف الكلية لإنتاج ٢٠٠ فستان هى مبلغ ٣٣٠٠ جنيه.

(i) أوجد معادلة التكاليف الخطية.

(ii) إذا كان سعر بيع الوحدة ٥,٢٥ جنيهاً أوجد نقطة التعادل.

(iii) أوجـد عـدد الوحـدات التـى يجـب بيعهـا للحصـول علـى ربـح قـدره ٢٠٠ جنيه.