الباب الرابع

المحددات

Determinants

الباب الرابع

المحددات

Determinants

٤-١ مقدمة :

يعرف المحدد بأنه مجموعة من العناصر مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة، بحيث يكون عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة، ويحدها خطان رأسيان. وتحدد درجة المحدد بعدد الصفوف أو عدد الأعمدة التى يحتويها. فمثلاً المحدد الذى يحتوى على صفين وعمودين يسمى محدداً من الدرجة الثانية، والمحدد الذى يحتوى على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة يسمى محدداً من الدرجة الثالثة، أما المحدد من الدرجة الرابعة فيتكون من أربعة صفوف وأربعة أعمدة وهكذا.

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{vmatrix} = \text{أ}$$

محدد من الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} \text{ب}_{31} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{32} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{33} & \text{ب}_{23} & \text{ب}_{13} \end{vmatrix} = \text{ب}$$

محدد من الدرجة الثالثة

جـ = $\begin{vmatrix} \text{جـ}_{41} & \text{جـ}_{31} & \text{جـ}_{21} & \text{جـ}_{11} \\ \text{جـ}_{42} & \text{جـ}_{32} & \text{جـ}_{22} & \text{جـ}_{12} \\ \text{جـ}_{43} & \text{جـ}_{33} & \text{جـ}_{23} & \text{جـ}_{13} \\ \text{جـ}_{44} & \text{جـ}_{34} & \text{جـ}_{24} & \text{جـ}_{14} \end{vmatrix}$ محدد من الدرجة الرابعة

ويعرف موقع العنصر فى المحدد بمعرفة رقم الصف ورقم العمود الذى يقع فيهما العنصر وعلى سبيل المثال :

العنصر أ٢١ يقع فى الصف الأول والعمود الثانى من المحدد أ ،
العنصر ب٢٣ يقع فى الصف الثالث والعمود الثانى من المحدد ب ،
العنصر جـ٣ يقع فى الصف الرابع والعمود الثالث من المحدد جـ .

مفكوك المحدد :

كل محدد مهما كانت درجته له قيمة عددية تسمى مفكوك هذا المحدد ويرمز لمفكوك المحدد بالرمز Δ (دلتا). ويمكن إيجاد مفكوك المحدد بطريقتين هما :

أولاً : طريقة المرافقات :

وتتلخص هذه الطريقة فى أن قيمة أى محدد تساوى مجموع حواصل ضرب عناصر أى صف أو أى عمود فى مرافقاتها كل على حسب موقعه فى المحدد الأصلى. وتستخدم هذه الطريقة قاعدة الإشارات حسب درجة المحدد المراد إيجاد قيمته.

قاعدة إشارات المحدد من الدرجة الثانية $\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$

قاعدة إشارات المحدد من الدرجة الثالثة
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

قاعدة إشارات المحدد من الدرجة الرابعة
$$\begin{vmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{vmatrix}$$

وبصفة عامة تحدد إشارة العامل المرافق للعنصر حسب موقع العنصر فى المحدد؛ فإذا كان مجموع رقم الصف ورقم العمود الذى يقع فيهما العنصر زوجياً كانت إشارة العامل المرافق لهذا العنصر موجبة، أما إذا كان هذا المجموع فردياً كانت إشارة العامل المرافق لهذا العنصر سالبة. وعلى سبيل المثال فان إشارة العامل المرافق للعنصر أ٢٢ فى المحدد أ موجبة لأن :

٢ + ٢ = ٤ (عدد زوجى)

وإشارة العامل المرافق للعنصر جـ٣٤ فى المحدد جـ سالبة لأن :

٣ + ٤ = ٧ (عدد فردى)

مرافق العنصر :

كل عنصر من عناصر أى محدد له محيدد نحصل عليه بشطب الصف والعمود اللذين يقع فيهما العنصر. أما مرافق العنصر فيعرف على أنه ذلك المحيدد مسبوقاً بإشارة العامل المرافق لهذا العنصر ولتوضيح هذا التعريف دعنا نتناول المثال التالى.

مثال (١) :

المحدد أ = $\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$

بالنسبة للعنصر أ$_{١١}$ إذا شطبنا الصف الأول والعمود الأول من المحدد أ نحصل على المحيدد :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix}$$

فإذا سبق هذا المحيدد إشارة العامل المرافق للعنصر أ$_{١١}$ وهى إشارة موجبة سمى مرافقاً لهذا العنصر. أى أن :

$+\begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix}$ يسمى مرافقاً للعنصر أ$_{١١}$

وبالمثل $-\begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ يسمى مرافقاً للعنصر أ$_{٢١}$

مثال (٢) :

أوجد مفكوك المحدد : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{vmatrix}$

الحل :

بما أن هذا المحدد من الدرجة الثانية، أى يحتوى على صفين وعمودين فإنه يمكن بسهولة الحصول على مفكوك هذا المحدد باستخدام القاعدة التالية :

مفكوك محدد الدرجة الثانية = حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى

− حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر

مـع ملاحظـة أن القطـر الرئيسـى يبـدأ مـن الـركن الشـمالى الشـرقى إلـى الركن الجنوبى الغربى. أى أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{vmatrix} = (\text{أ}_{11} \times \text{أ}_{22}) - (\text{أ}_{21} \times \text{أ}_{12})$$

مثال (٣) :

أوجد قيمة المحدد التالى :

$$\begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 2- \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 2- \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (-1 \times -2)$$

$$= 6 - 2 = 4$$

مثال (٤) :

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة :

$$\begin{vmatrix} 2 & \text{س} \\ 1 & \text{س}^2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل :

نقوم بفك المحدد بالطرف الأيمن من المعادلة فنحصل على معادلة تربيعية كالتالى :

$$\begin{vmatrix} 2 & \text{س} \\ 1 & \text{س}^2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$(\text{س} \times 1) - (2 \times \text{س}^2) = \text{صفر}$$

س − ٢ س^{٢} = صفر

بأخذ س كعامل مشترك بالطرف الأيمن

س (١ − ٢ س) = صفر

	أو	
إما س = صفر		١ − ٢ س = صفر
		١ = ٢ س
		س = $\frac{1}{2}$

مثال (٥) :

أوجد مفكوك المحدد التالى :

الحل : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر الصف الأول نوجد مفكوك المحدد كالتالى :

$$\Delta = ٣ \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-١) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

= ٣ [(−٣ × −٢) − ١ (٤ × −١)] − ١ [(٢ × −٢)

− (٤ × ١)] − ١ [(٢ × −١) − (−٣ × ١)]

Δ = ٣ (٦ + ٤) − (−٤ − ٤) − (−٢ + ٣)

= ٣٠ + ٨ − ١ = ٣٧

مثال (٦) :

أوجد مفكوك المحدد التالى :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل :

باستخدام عناصر الصف الأول :

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+3 \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بفك كل محيدد من الدرجة الثالثة كما بالمثال رقم (٥) وذلك كالتالى:

مفكوك المحيدد الأول باستخدام عناصر العمود الأول :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\,(4 - 2) + 5\,(4 - 4)$$

$$= -3\,(2) + 5\,(0) = -6$$

مفكوك المحيدد الثانى باستخدام عناصر الصف الأول :

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -٢ \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} -٤ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-١ \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -٢ \; (٤ - ٢) - ٤ \; (-١ + ١) - (٢ - ٤)$$

$$= -٢ \; (٢) - ٤ \; (٠) - (-٢)$$

$$= -٤ - ٠ + ٢ = -٢$$

مفكوك المحيدد الثالث باستخدام عناصر الصف الثانى :

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -١ \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \quad -١ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(٣ + ٥) - (-١٠ - ٣)$$

$$= -٨ + ١٣ = ٥$$

مفكوك المحيدد الرابع باستخدام عناصر الصف الثانى :

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -١ \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad -(-٤) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-٦ - ٢٠) + ٤ \; (-١٠ - ٣)$$

$$= ٢٦ - ٥٢ = -٢٦$$

والأن يمكننا إيجاد قيمة مفكوك المحدد الأصلى :

Δ = ١ (−٦) −٢ (−٢) + ٣ (٥) −١ (−٢٦)

= −٦ + ٤ + ١٥ + ٢٦

= −٦ + ٤٥ = ٣٩

وتجدر الإشارة هنا أن خطوات إيجاد مفكوك المحددات من الدرجة الرابعة والدرجة الخامسة تحتاج إلى حسابات مطولة وشاقة، وبدلاً من ذلك فإنه يمكن استخدام طريقة مفكوك لابلاس فى إيجاد مفكوك تلك المحددات بيد أن هذه الطريقة تخرج عن نطاق هذا الكتاب. فضلا عن ذلك فإنه فى مثل هذه الحالات يكون من المفيد استخدام الحاسب الآلى لإيجاد مفكوك مثل هذه المحددات.

ثانياً : طريقة مجموع حواصل ضرب الأقطار :

وتتلخص هذه الطريقة فى تكرار العمودين الأول والثانى أو الصفين الأول والثانى للمحدد المراد إيجاد قيمته وتحدد قيمة المحدد بالقاعدة التالية :

Δ = (مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار التى تبدأ من الركن الشمالى الشرقى وتنتهى عند الركن الجنوبى الغربى) − (مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار التى تبدأ من الركن الجنوبى الشرقى وتنتهى عند الركن الشمالى الغربى).

مثال (٧) :

أوجد مفكوك المحدد التالى :

$$\begin{vmatrix} 1- & 1 & 3 \\ 2- & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :

باستخدام طريقة مجموع حواصل ضرب الأقطار وذلك بإضافة العمودين الأول والثانى نحصل على :

شمال غرب	١	٣	١−	١	٣	شمال شرق
	٢	٢	٢−	٢	٢	
جنوب غرب	٣	١	٤	٣	١	جنوب شرق

[(٣×٢×١−) + (١×٢−×١) + (٤×٢×٣)] = Δ

[(١×٢×٤) + (٣×٢−×٣) + (١−×٢×١)] −

[٨ + ١٨ − ٢−] − [٦ − ٢ − ٢٤] =

٢٨ = ١٢ + ١٦ = (١٢−) − ١٦ =

٤−٢ بعض خصائص المحددات :

تتميز المحددات ببعض الخصائص التى تساعد كثيراً فى تسهيل وتبسيط العمليات الحسابية عند إيجاد مفكوك المحدد.

الخاصية الأولى :

قيمة مفكوك المحدد لا تتغير إذا بدلت صفوفه أعمدة وأعمدته صفوف.

مثال (٨) :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2- & 1 \\ 3- & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ المحدد

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (7 + 9) + 2\,(0 + 6) + 5\,(0 - 2)$$

$$= 16 + 12 - 10$$

$$= 28 - 10 = 18$$

وعند تبديل صفوف المحدد أعمدة وأعمدته صفوف وإيجاد قيمة المحدد بعد التبديل نجد أن قيمة المحدد الناتج = ١٨ أيضا وذلك كالآتى :

المحدد بعد التبديل $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر الصف الأول :

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (7 + 9) + 2\,(6 - 5)$$

$$= 16 + 2 = 18$$

الخاصية الثانية :

إذا كان جميع عناصر المحدد تساوى أصفاراً ماعدا عناصر القطر الرئيسى، فإن قيمة هذا المحدد تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى.

مثال (٩) :

المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

جميع عناصره أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى.

$$\Delta = ٣ \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = ٣ (٥ \times ٤) = ٦٠$$

الخاصية الثالثة :

إذا بدلنا صفين متجاورين أو عمودين متجاورين فإن قيمة المحدد بعد التبديل تساوى المعكوس الجمعى لقيمة المحدد قبل التبديل.

مثال (١٠) :

المحدد
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٨$$

المحدد بعد تبديل العمودين الأول والثانى :

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٨$$

الخاصية الرابعة :

إذا كان بالمحدد صفان (أو عمودان) متطابقان تماماً فأن قيمة المحدد تساوى صفراً.

مثال (١١) :

في المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

العمودان الأول والثالث متطابقان تماماً

Δ = صفر

الخاصية الخامسة :

إذا كان أحد الصفوف (أو أحد الأعمدة) مضاعفاً لصف آخر (أو عمود آخر) فإن قيمة مفكوك المحدد تساوى صفراً.

مثال (١٢) :

في المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

العمود الثالث = ٣ أمثال العمود الأول

Δ = ٣ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

= ٣ × صفر = صفر

الخاصية السادسة :

إذا ضرب كل عنصر من عناصر صف ما (أو عمود ما) فى معامل عددى فإن قيمة المحدد الجديد تساوى قيمة المحدد الأصلى مضروباً فى هذا المعامل العددى.

مثال (١٣) :

بالرجوع إلى المحدد $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

حيث Δ = ١٨

وبضرب عناصر الصف الثانى فى المعامل العددى ٥ فإن :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \text{٩٠}$$

$$= \text{٥} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \text{٥} \times \text{١٨} = \text{٩٠}$$

الخاصية السابعة :

إذا ضربنا عناصر صف ما (أو عمود ما) فى معامل عددى، وجمعنا الناتج على عناصر صف آخر (أو عمود آخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير.

مثال (١٤) :

المحدد $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

إذا ضربنا عناصر العمود الأول فى المعامل العددى ٥ ، وجمعنا الناتج على عناصر العمود الثانى نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2+5 & 5 \\ 0 & 1+0 & -3 \\ 2 & 3+10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 13 & 7 \end{vmatrix}$$

وأن قيمة المحدد الناتج لا تتغير حيث :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = ١٨ \quad ، \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 13 & 7 \end{vmatrix} = ١٨$$

الخاصية الثامنة :

إذا كان بالمحدد صف ما (أو عمود ما) جميع عناصره أصفار ، فإن قيمة المحدد تساوى صفراً.

مثال (١٥) :

المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

بفك هذا المحدد باستخدام عناصر العمود الثالث نجد أن قيمته تساوى صفراً لأننا سوف نضرب كل مرافق فى صفر.

٤-٣ استخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية :

إذا فرضنا أن لدينا المعادلتين التاليتين :

أ$_1$ س + ب$_1$ ص = جـ$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص = جـ$_2$

فإنه سبق لنا حل مثل هاتين المعادلتين بيانياً ثم جبرياً باستخدام طريقتى الحذف والتعويض وذلك فى الباب الأول من هذا الكتاب. وفى هذا الباب سوف نستخدم المحددات لحل مثل هذا النظام من المعادلات الخطية ويتلخص الحل فى الخطوات الآتية :

(i) نوجد محدد المعاملات ونرمز له بالرمز Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{أ}_1 \times \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \times \text{أ}_2$$

(ii) نستبدل عمود معاملات المتغير س بعمود الثوابت ونحصل على Δ_1.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{جـ}_1 \times \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \times \text{جـ}_2$$

(iii) نستبدل عمود معاملات المتغير ص بعمود الثوابت ونحصل على Δ_2.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix} = \text{أ}_1 \times \text{جـ}_2 - \text{جـ}_1 \times \text{أ}_2$$

(iv)

$$\text{س} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\text{جـ}_1 \times \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \times \text{جـ}_2}{\text{أ}_1 \times \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \times \text{أ}_2}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\text{أ}_1 \times \text{جـ}_2 - \text{جـ}_1 \times \text{أ}_2}{\text{أ}_1 \times \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \times \text{أ}_2}$$

مثال (١٦) :

أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الآتى باستخدام المحددات.

٣ س + ٧ ص = ١٣

٢ س + ٥ ص = ١٠

الحل :

(i) محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (٣ \times ٥) - (٧ \times ٢)$$

$$= ١٥ - ١٤ = ١$$

(ii) نستبدل عمود معاملات المتغير س بعمود الثوابت.

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = (١٣ \times ٥) - (٧ \times ١٠)$$

$$= ٦٥ - ٧٠ = -٥$$

(iii) نستبدل عمود معاملات المتغير ص بعمود الثوابت.

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = (٣ \times ١٠) - (١٣ \times ٢)$$

$$= ٣٠ - ٢٦ = ٤$$

(iv) $$\text{س} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{1} = -٥$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1} = ٤$$

حل ثلاث معادلات فى ثلاثة متغيرات :

إذا كان لدينا نظام المعادلات الآتى :

$$\text{أ}_١ \text{س} + \text{ب}_١ \text{ص} + \text{جـ}_١ \text{ع} = \text{د}_١$$

$$\text{أ}_٢ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{ص} + \text{جـ}_٢ \text{ع} = \text{د}_٢$$

أ٣ س + ب٣ ص + جـ٣ ع = د٣

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات باستخدام المحددات كالآتى :

(i) محدد المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

(ii) نستبدل عمود معاملات المتغير س بعمود الثوابت.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{د}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{د}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{د}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

(iii) نستبدل عمود معاملات المتغير ص بعمود الثوابت.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{د}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{د}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{د}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

(iv) نستبدل عمود معاملات المتغير ع بعمود الثوابت.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{د}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{د}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{د}_3 \end{vmatrix}$$

(v) $\text{س} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ ، $\text{ع} = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

مثال (١٦) :

استخدم المحددات لحل نظام المعادلات الآتى :

٣ س$_{١}$ − س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ = −١

٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$ − س$_{٣}$ = ٥

س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ٤

الحل :

محدد المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= ٣\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= ٣ (١ + ٢) + ١ (٢ + ١) + ٢ (٤ − ١)

= ٣ (٣) + ١ (٣) + ٢ (٣)

= ٩ + ٣ + ٦

= ١٨

نستبدل العمود الأول بعمود الثوابت ونحصل على $\Delta_{١}$.

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -١\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

= −١ (١ + ٢) + ١ (٥ +٤) + ٢ (١٠ − ٤)

= −١ (٣) + ١ (٩) + ٢ (٦)

= −٣ + ٩ + ١٢ = ١٨

نستبدل العمود الثانى بعمود الثوابت لنحصل على Δ_2 .

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

= ٣ (٥ + ٤) + ١ (٢ + ١) + ٢ (٨ − ٥)

= ٣ (٩) + ١ (٣) + ٢ (٣)

= ٢٧ + ٣ + ٦ = ٣٦

نستبدل العمود الثالث بعمود الثوابت لنحصل على Δ_3 .

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= ٣ (٤ − ١٠) + ١ (٨ − ٥) − ١ (٤ − ١)

= ٣ (−٦) + ١ (٣) − ١ (٣)

= − ١٨ + ٣ − ٣ = − ١٨

$$س_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = ١$$

$$س_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{18} = ٢$$

$$س_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{18} = -١$$

قاعدة هامة :

(i) إذا كانت $\Delta \neq$ صفر فإن نظام المعادلات له حل وحيد (Unique solution) .

(ii) إذا كانت Δ = صفر ، $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ = صفر فإن نظام المعادلات له عدد لانهائى من الحلول.

(iii) إذا كان Δ = صفر ، $\Delta_1 \neq$ صفر أو $\Delta_2 \neq$ صفر أو $\Delta_3 \neq$ صفر فإن نظام المعادلات ليس له حل.

مثال (١٧) :

استخدم المحددات لحل نظام المعادلات التالى :

٢ س − ٣ ص + ع = ٥

س + ٢ ص − ع = ٧

٦ س − ٩ ص + ٣ع = ٤

الحل :

محدد المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر الصف الأول :

$$\Delta = ٢ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$$

= ٢ (٦ − ٩) + ٣ (٣ + ٦) + ١ (−٩ − ١٢)

= ٢ (−٣) + ٣ (٩) + ١ (−٢١)

= − ٦ + ٢٧ − ٢١ = صفر

نستبدل عناصر العمود الأول بعمود الثوابت لنحصل على $\Delta_١$.

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix}$$

باستخدام عناصر الصف الأول :

$$\Delta_١ = ٥ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

= ٥ (٦ − ٩) + ٣ (٢١ + ٤) + ١ (−٦٣ − ٨)

= ٥ (−٣) + ٣ (٢٥) + ١ (− ٧١)

= − ١٥ + ٧٥ − ٧١

= ٧٥ − ٨٦ = −١١

Δ = صفر ، $\Delta_١ \neq$ صفر

نظام المعادلات ليس له حل.

مثال (١٨) :

ينتج مصنع دينا نوعين من لعب الأطفال فإذا علمت أن الوحدة المنتجة من كل نوع يجب أن تمر بقسمين للإنتاج حتى تكون تامة الصنع. وبافتراض أن الوحدة من النوع الأول يلزم لها ٣ ساعات فى القسم الأول، ٥ ساعات فى

القسم الثانى. وأن الوحدة من النوع الثانى يلزم لها ساعتان فى القسم الإنتاجى الأول، ٤ ساعات فى القسم الإنتاجى الثانى. فإذا كان عدد ساعات العمل فى القسم الأول والقسم الثانى هما ١٣٠٠ ساعة، ٢٤٠٠ ساعة على الترتيب. حدد مستوى الإنتاج من كلا النوعين بفرض استخدام كافة الطاقات المتاحة.

الحل :

يمكن تلخيص بيانات التمرين فى جدول كالآتى :

النوع	أقسام الإنتاج	
	القسم الأول	**القسم الثانى**
المنتج الأول	٣	٥
المنتج الثانى	٢	٤
الطاقة المتاحة	١٣٠٠	٢٤٠٠

نفرض أن عدد الوحدات من النوع الأول = س

وأن عدد الوحدات من النوع الثانى = ص

وبالتالى فإنه يمكن صياغة هذه البيانات فى نظام المعادلات التالى :

٣ س + ٢ ص = ١٣٠٠

٥ س + ٤ ص = ٢٤٠٠

وباستخدام المحددات يمكن حل النظام كالآتى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = ١٢ - ١٠ = ٢$$

باستبدال عناصر العمود الأول بعمود الثوابت نحصل على Δ_1 حيث :

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} 2 & 1300 \\ 4 & 2400 \end{vmatrix} = (١٣٠٠ \times ٤) - (٢ \times ٢٤٠٠)$$

$$= ٥٢٠٠ - ٤٨٠٠ = ٤٠٠$$

باستبدال عناصر العمود الثانى بعمود الثوابت نحصل على $\Delta_{٢}$ حيث :

$$\Delta_{٢} = \begin{vmatrix} 1300 & 3 \\ 2400 & 5 \end{vmatrix} = (٣ \times ٢٤٠٠) - (٥ \times ١٣٠٠)$$

$$= ٧٢٠٠ - ٦٥٠٠ = ٧٠٠$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{400}{2} = ٢٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{700}{2} = ٣٥٠ \text{ وحدة}$$

مثال (١٩) :

يقوم مصنع سارة بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات؛ المنتج الأول، المنتج الثانى، المنتج الثالث. فإذا علمت أن كل نوع من هذه المنتجات الثلاثة يحتاج ثلاثة أنواع من المواد الخام؛ مادة خام (أ)، مادة خام (ب)، مادة خام (جـ) والجدول التالى يوضح احتياجات كل منتج من المواد الخام المختلفة كما يبين كميات المواد الخام المتاحة بالمصنع. بفرض استخدام كافة المواد الخام المتاحة. ما هى خطة الإنتاج التى تقترحها ؟

المنتج	مادة خام (أ)	مادة خام (ب)	مادة خام (جـ)

الأول	٢	٤	٣
الثانى	١	٥	٢
الثالث	٤	٣	٣
الطاقة المتاحة	١٦٠٠	٢٣٠٠	١٦٠٠

الحل :

يمكن صياغة البيانات فى نظام المعادلات التالى :

٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ١٦٠٠

٤ س$_{١}$ + ٥ س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$ = ٢٣٠٠

٣ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + ٣ س$_{٣}$ = ١٦٠٠

وباستخدام المحددات يمكن حل هذا النظام كالآتى :

محدد المعاملات Δ = $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} 4 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ٢ =

= ٢ (١٥ – ٦) – ١ (١٢ – ٩) + ٤ (٨ – ١٥)

= ٢ (٩) – ١ (٣) + ٤ (–٧)

= ١٨ – ٣ – ٢٨ = –١٣

باستبدال العمود الأول بعمود الثوابت نحصل على $\Delta_{١}$.

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix}4 & 1 & 1600\\ 3 & 5 & 2300\\ 3 & 2 & 1600\end{vmatrix}$$

$$= ١٦٠٠\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 2300\\ 3 & 1600\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}5 & 2300\\ 2 & 1600\end{vmatrix}$$

= ١٦٠٠ (١٥ − ٦) − ١ (٦٩٠٠ − ٤٨٠٠)

+ ٤ (٤٦٠٠ − ٨٠٠٠)

= ١٦٠٠ (٩) − ١ (٢١٠٠) + ٤ (−٣٤٠٠)

= ١٤٤٠٠ − ٢١٠٠ − ١٣٦٠٠ = −١٣٠٠

باستبدال عناصر العمود الثانى بعمود الثوابت نحصل على $\Delta_{٢}$.

$$\Delta_{٢} = \begin{vmatrix}4 & 1600 & 2\\ 3 & 2300 & 4\\ 3 & 1600 & 3\end{vmatrix}$$

$$= ٢\begin{vmatrix}3 & 2300\\ 3 & 1600\end{vmatrix} - 1600\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2300 & 4\\ 1600 & 3\end{vmatrix}$$

= ٢ (٦٩٠٠ − ٤٨٠٠) − ١٦٠٠ (١٢ − ٩)

+ ٤ (٦٤٠٠ − ٦٩٠٠)

= ٢ (٢١٠٠) − ١٦٠٠ (٣) + ٤ (−٥٠٠)

= ٤٢٠٠ − ٤٨٠٠ − ٢٠٠٠ = −٢٦٠٠

باستبدال عناصر العمود الثالث بعمود الثوابت نحصل على $\Delta_{٣}$.

$$\Delta_{٣} = \begin{vmatrix}1600 & 1 & 2\\ 2300 & 5 & 4\\ 1600 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$= ٢ \begin{vmatrix}5 & 2300\\ 2 & 1600\end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix}4 & 2300\\ 3 & 1600\end{vmatrix} + 1600 \begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

= ٢ (٨٠٠٠ − ٤٦٠٠) − ١ (٦٤٠٠ − ٦٩٠٠)

+ ١٦٠٠ (٨ − ١٥)

= ٢ (٣٤٠٠) − (− ٥٠٠) + ١٦٠٠ (−٧)

= ٦٨٠٠ + ٥٠٠ − ١١٢٠٠ = − ٣٩٠٠

Δ = − ١٣

$\Delta_١$ = − ١٣٠٠

$\Delta_٢$ = − ٢٦٠٠

$\Delta_٣$ = − ٣٩٠٠

أى أن : س١ $= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1300}{-13} =$ ١٠٠ وحدة

س٢ $= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2600}{-13} =$ ٢٠٠وحدة

س٣ $= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3900}{-13} =$ ٣٠٠ وحدة

تمارين على الباب الرابع

أوجد مفكوك المحددات الآتية :

١- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$

٢- $\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$

٣- $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

٤- $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

٥- $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

٦- $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

٧- $\begin{vmatrix} \text{س} - 2 & \text{س} + 1 \\ 5 & \text{س} \end{vmatrix}$

٨- $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

٩- حل المعادلة الآتية :

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

١٠- حل المعادلة الآتية :

$$\begin{vmatrix} (2+\text{س}) & (3-2\,\text{س}) \\ (3-\text{س}) & (2+\text{س}) \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

استخدم المحددات لحل نظام المعادلات فى كل مما يأتى :

١١- $\text{س} - \text{ص} = ١٦$

$\text{س} - ٣\,\text{ص} = ٢$

١٢- $٣\,\text{س} + ٧\,\text{ص} = -١$

$٩\,\text{س} - \text{ص} = ١٩$

١٣- $-٥\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} = ٣٤$

$٣\,\text{س}_{١} + ٥\,\text{س}_{٢} = ٣٠$

١٤- $-٣\,\text{ص}_{١} - ٨\,\text{ص}_{٢} = -٢$

$٥\,\text{ص}_{١} + ٣\,\text{ص}_{٢} = ١٣$

١٥- $-٣\,\text{س} + ٢\,\text{ص} = ١$

$٢\,\text{س} - \text{ص} = ٣$

١٦- − ٣ س + ٥ ص − ١٤ = صفر

٣ ص + س − ٧ = صفر

١٧- − $\frac{1}{3}$ س$_{1}$ + $\frac{1}{2}$ س$_{2}$ = ٧

$\frac{1}{2}$ س$_{1}$ + $\frac{1}{5}$ س$_{2}$ = ١

١٨- ٢ ص$_{1}$ + ٣ ص$_{2}$ = ١٣

٦ ص$_{1}$ + ٩ ص$_{2}$ = ٤٠

١٩- −٢ (س − ص) − ٥ = صفر

٤ (١ − ص) = ٣ س

٢٠- − س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ = ٨

٢ س$_{1}$ + س$_{2}$ = ١

٢١- − س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ + س$_{3}$ = ٨

س$_{1}$ − س$_{2}$ − ٢ س$_{3}$ = −٧

٢ س$_{1}$ + س$_{2}$ − ٣ س$_{3}$ = −٥

٢٢- − س + ٢ ص = ٥

٣ ص − ع = ١

٢ س − ص + ٣ ع = ١١

٢٣- − ٤ س + ٢ ص − ٦ ع = ٧

٣ س − ص + ٢ ع = ١٢

٦ س + ٣ ص − ٩ ع = ١٠

٢٤- − ص$_{١}$ + ٢ ص$_{٢}$ − ص$_{٣}$ = ٢
٢ ص$_{١}$ − ٣ ص$_{٢}$ +٤ ص$_{٣}$ = −٤
٣ ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ + ص$_{٣}$ = صفر

٢٥- − ٢ س − ص + ٣ ع = ٤
س + ٣ ص − ع = ٥
٦ س − ٣ ص + ٩ ع = ١٠

٢٦- −س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ٦
٣ س$_{١}$ +٢ س$_{٢}$ − س$_{٣}$ = ٧
س$_{١}$ − ٤ س$_{٢}$ − ٣ س$_{٣}$ + ٥ = صفر

٢٧- −س + ص − ع + ٥ = صفر
ص = س
ع = ٣ − ص

٢٨- − ٢ س + ص + ٦ ع = ٣
س − ص + ٤ ع = ١
٣ س + ٢ ص − ٢ع = ٢

٢٩- − ٢ س − ٥ ص = − ٣ ع + ٢
٣ س = ١٠ − ع − ٢ ص
س + ص − ع = ٦

٣٠- س + ص + ٣ ع - ٩ = صفر

٣ س + ٢ ص - ع - ٦ = صفر

٢ س - ص + ع - ٥ = صفر

أوجد مفكوك المحددات التالية :

٣١-

صفر„	2	3	1
3 –	1–	4	صفر„
5 –	صفر„	5	2
1	2 –	1	1–

٣٢-

صفر„	2	3	1
3 –	1–	4	صفر„
5 –	صفر„	5	2
1	2 –	1	1–

٣٣- أوجد مفكوك كل محدد من المحددات الآتية باستخدام الحاسب الآلى:

1–	4	2–
1	4–	1
1–	2	1–

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1- & 4 & 3- & 2- \\ 1 & 4- & 0 & 1 \\ 1- & 2 & 5 & 1- \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{صفر,,} & 2 & 3 & 1 \\ 3- & 1- & 4 & \text{صفر,,} \\ 5- & \text{صفر,,} & 5 & 2 \\ 1 & 2- & 1 & 1- \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{صفر,,} & 2 & 3 & 1 \\ 3- & 1- & 4 & \text{صفر,,} \\ 5- & \text{صفر,,} & 5 & 2 \\ 1 & 2- & 1 & 1- \end{vmatrix}$$