

الباب الخامس

المصفوفات

**Matrices**

## الباب الخامس

### المصفوفات

### Matrices

#### ١-٥ مقدمة :

تعرف المصفوفة بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة في شكل صفوف وأعمدة وموضوعة داخل قوسين كالآتي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- أ<sub>١١</sub> يسمى عنصراً في المصفوفة أ ويقع في الصف الأول والعمود الأول.
- أ<sub>٢١</sub> يسمى عنصراً في المصفوفة أ ويقع في الصف الأول والعمود الثاني.
- أ<sub>١٣</sub> يسمى عنصراً في المصفوفة أ ويقع في الصف الثالث والعمود الأول.

أى أن الرقم الأول في دليل العنصر يعبر عن رقم الصف والرقم الثانى يعبر عن رقم العمود. كما أن العناصر أ<sub>١١</sub>، أ<sub>٢٢</sub>، أ<sub>٣٣</sub> تسمى عناصر القطر الرئيسى.

والمصفوفة قد تكون مربعة إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة وقد تكون مستطيلة إذا كان عدد الصفوف لا يساوى عدد الأعمدة، مثال ذلك:

المصفوفة أ =  $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  مصفوفة مربعة تحتوى على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

المصفوفة ب =  $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  مصفوفة مستطيلة لأنها تتكون من صفين وأربعة أعمدة.

وتتحدد درجة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التى تحتويها. فمثلاً المصفوفة :

أ =  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$  مصفوفة مربعة تتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وذلك فهى من الدرجة (3 × 3).

والمصفوفة ب =  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$  مصفوفة مستطيلة من الدرجة (2 × 3) لأنها تتكون من صفين وثلاثة أعمدة.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالي وضع الحلول لهذه العلاقات، فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة فى الاقتصاد والإحصاء وبحوث العمليات وغيرها من العلوم الأخرى. ومن ثم فإننا سوف نتناول فى هذا الباب بعض المفاهيم والتعاريف الهامة وأنواع المصفوفات ثم ننتقل إلى جبر المصفوفات (الجمع والطرح والضرب) وبعدها نتناول كيفية إيجاد معكوس المصفوفة المربعة بالطرق المختلفة تمهيداً لاستخدامه فى حل

المعادلات الخطية، ثم ننهي هذا الباب بعرض بعض التطبيقات الاقتصادية والتجارية للمصفوفات.

## ٥-٢ أنواع المصفوفات : Types of Matrices

توجد المصفوفات على أنواع كثيرة ومختلفة وكل نوع له ما يميزه عن النوع الآخر بما يحتويه من صفوف وأعمدة.

### المصفوفة المربعة : Square Matrix

هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدها ولذلك فهي تكون من الرتبة (٢ × ٢) أو (٣ × ٣) أو (٤ × ٤) أو (م × ن) ، حيث م = ن فعلى سبيل المثال فإن :

$$\text{مصفوفة مربعة من الدرجة (٢×٢)} \quad \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\text{مصفوفة مربعة من الدرجة (٣×٣)} \quad \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} & \text{ب}_{13} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{23} \\ \text{ب}_{31} & \text{ب}_{32} & \text{ب}_{33} \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$\text{مصفوفة مربعة من الدرجة (٤×٤)} \quad \begin{bmatrix} \text{ج}_{11} & \text{ج}_{12} & \text{ج}_{13} & \text{ج}_{14} \\ \text{ج}_{21} & \text{ج}_{22} & \text{ج}_{23} & \text{ج}_{24} \\ \text{ج}_{31} & \text{ج}_{32} & \text{ج}_{33} & \text{ج}_{34} \\ \text{ج}_{41} & \text{ج}_{42} & \text{ج}_{43} & \text{ج}_{44} \end{bmatrix} = \text{ج}$$

وسوف نرى فيما بعد أن مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطية هي مصفوفة مربعة دائماً.

### المصفوفة المستطيلة : Rectangular Matrix

هي مصفوفة عدد صفوفها لا يساوي عدد أعمدها ومثال ذلك :

$$\text{مصفوفة مستطيلة من الدرجة } (2 \times 3) \quad \begin{bmatrix} 21^أ & 11^أ \\ 22^أ & 12^أ \\ 23^أ & 13^أ \end{bmatrix} = أ$$

$$\text{مصفوفة مستطيلة من الدرجة } (4 \times 3) \quad \begin{bmatrix} 41^ب & 31^ب & 21^ب & 11^ب \\ 42^ب & 32^ب & 22^ب & 12^ب \\ 43^ب & 33^ب & 23^ب & 13^ب \end{bmatrix} = ب$$

ومن أمثلة المصفوفة المستطيلة؛ مصفوفة الصف الواحد، مصفوفة العمود الواحد كما سنرى بعد قليل.

### مصفوفة الوحدة : Identity Matrix

وهى مصفوفة مربعة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى الواحد الصحيح، وباقى عناصر المصفوفة أصفار. ويرمز لها بالرمز I مثال ذلك :

$$\text{ويرمز لها بالرمز } 2I \cdot \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{ويرمز لها بالرمز } 3I \cdot \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{ويرمز لها بالرمز } 4I \cdot \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

### المصفوفة القياسية : Scalar Matrix

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي متساوية القيمة وباقي عناصرها  
أصفار فمثلاً :

$$\text{مصفوفة قياسية من الدرجة } (2 \times 2) \quad \begin{bmatrix} 0 & ك \\ ك & 0 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\text{مصفوفة قياسية من الدرجة } (3 \times 3) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & ك \\ 0 & ك & 0 \\ ك & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

حيث ك مقدار حقيقي، ك  $\neq$  صفر وتجدر الإشارة هنا أن المصفوفة القياسية  
= ك  $\times$  مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ، مثال ذلك :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### المصفوفة القطرية : Diagonal Matrix

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي مقادير حقيقية ليست  
بالضرورة متساوية. وعلى ذلك فإن كلاً من مصفوفة الوحدة والمصفوفة  
القياسية هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

$$\text{مصفوفة قطرية من الدرجة } (2 \times 2) \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة قطرية من الدرجة } (3 \times 3)$$

### المصفوفة الصفيرية : Null Matrix

هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار وقد تكون المصفوفة الصفيرية مربعة أو مستطيلة، ومثال ذلك :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

### مصفوفة الصف الواحد (متجه الصف) : Row Vector

وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على صف واحد وأى عدد من الأعمدة وأمثلة ذلك :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \end{bmatrix} \text{ متجه صف من الدرجة } (2 \times 1)$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{31} & \text{ب}_{41} \end{bmatrix} \text{ متجه صف من الدرجة } (4 \times 1)$$

$$\text{ج} = \begin{bmatrix} \text{ج}_{11} & \dots & \text{ج}_{21} & \dots & \text{ج}_{1n} \end{bmatrix} \text{ متجه صف من الدرجة } (1 \times n)$$

### مصفوفة العمود الواحد (متجه عمود) : Column Vector

وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على عدة صفوف وعمود واحد فقط وأمثلة ذلك :

متجه عمود من الدرجة (3 × 1)  $\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{13} \end{bmatrix} = \text{أ}$

متجه عمود من الدرجة (4 × 1)  $\begin{bmatrix} \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{13} \\ \text{ب}_{14} \end{bmatrix} = \text{ب}$

متجه عمود من الدرجة (ن × 1)  $\begin{bmatrix} \text{ج}_{11} \\ \text{ج}_{12} \\ \vdots \\ \text{ج}_{1ن} \end{bmatrix} = \text{ج}$

### مبدول المصفوفة : Transpose of Matrix

نحصل على مبدول المصفوفة بتبديل صفوفها بأعمدتها أى بجعل صفها الأول مكان العمود الأول وصفها الثانى مكان العمود الثانى وهكذا. فإذا كان لدينا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فإن مبدول هذه المصفوفة أ ويرمز له بالرمز أ' يكون على الصورة الآتية :

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix} = \text{أ}'$$



### خصائص مبدول المصفوفة :

إذا كان لدينا المصفوفات أ ، ب ، ج فإن :

$$(i) \quad 'أ = 'أ$$

$$(ii) \quad '(أ + ب + ج) = 'أ + 'ب + 'ج$$

$$(iii) \quad 'أ \times 'ب \times 'ج = '(أ \times ب \times ج)$$

$$(iv) \quad '(أ^{-1}) = 'أ^{-1}$$

مثال (١) :

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 5 & 1- & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} = أ$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1- \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 'أ \quad \text{فإن}$$

### المصفوفة المتماثلة : Symmetrical Matrix

هي مصفوفة مربعة لو تم تدويرها لأعطت المصفوفة الأصلية.

مثال (٢) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix} = أ \quad \text{المصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix} = \text{مبدول المصفوفة } 'أ$$

واضح أن :  $A = A'$   
إذن :  $A$  تسمى مصفوفة متماثلة.

ونلاحظ أنه عند إيجاد مبدول المصفوفة (  $A$  ) نجد أن عناصر القطر الرئيسي لا تتغير وبالتالي فإنه يمكننا القول أن المصفوفة القطرية والمصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة والمصفوفة الصفرية المربعة جميعها مصفوفات متماثلة. كما أن المصفوفات المتماثلة تعطى معكوسات متماثلة أيضاً كما سنرى فيما بعد.

### تساوى المصفوفات : Equality of Matrices

يقال لمصفوفتين أنهما متساويتان إذا كانتا من نفس الدرجة وكان كل عنصر في المصفوفة الأولى يساوي نظيره في المصفوفة الثانية. فمثلاً المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & س \\ ص & 3 \end{bmatrix}$$

يقال أنهما متساويتان إذا كان  $س = 1$  ،  $ص = 4$

مثال (3) :

أوجد قيمة  $س$  ،  $ص$  ،  $ع$  إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & س \\ ص & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

حيث أن المصفوفتين متساويتان، فإن كل عنصر في المصفوفة الأولى يساوى نظيره في المصفوفة الثانية، أى أن :

$$\begin{array}{lcl} ١- = ١ + ع & & س - ٢ = س \\ ٢- = ع & & ٢ = س ٢ \\ ٥ = ص & & ١ = س \end{array}$$

المصفوفة المفردة وغير المفردة :

### Singular & Non-Singular Matrices

لأى مصفوفة مربعة أ من الدرجة (ن × ن)، يقال إنها غير مفردة إذا كان المحدد الذى درجته (ن) لا يتلاشى. أى أنه :

إذا كان  $|أ| \neq ٠$  صفر فإن المصفوفة أ غير مفردة.

أما إذا كان  $|أ| = ٠$  صفر فإن المصفوفة أ تسمى مصفوفة مفردة.

وتلعب المصفوفة غير المفردة (non-singular) دوراً هاماً فى إيجاد معكوس المصفوفة.

مثال (٤) :

بين ما إذا كانت المصفوفة الآتية مفردة أم غير مفردة:

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كالاتى:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} 3 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} (2-) + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} 1 = | أ |$$
$$(9 - 10) 3 + (12 - 14) 2 - (20 - 21) 1 =$$
$$-1 = 3 + 2 - 1 = \text{صفر}$$

حيث أن :  $| أ | = \text{صفر}$   
فالمصفوفة أ مصفوفة مفردة.

مثال (٥) :

بين ما إذا كانت المصفوفة الآتية مفردة أم غير مفردة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

الحل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كما سبق. وحيث أن :  $| ب | = 18 \neq \text{صفر}$

فإن المصفوفة (ب) مصفوفة غيرمفردة.

### محدد المصفوفة المربعة : Determinant of a Square Matrix

إذا كانت المصفوفة مربعة فإنه يمكن تكوين محدد لهذه المصفوفة يسمى محدد المصفوفة. فمثلاً إذا كان لدينا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فإن محدد المصفوفة أ والذي يرمز له بالرمز | أ | يمكن إيجاد كالاتي :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = | \text{أ} |$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{3+} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{2-} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{1} =$$

$$(3 - 2) 3 + (0 - 10) 2 - (0 - 5) 1 =$$

$$18 - 20 - 5 =$$

### 3-5 العمليات على المصفوفات : Matrix-Operations

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجة على أن يتم جمع العناصر المتناظرة جمعاً جبرياً. أما في حالة ضرب المصفوفات فإن هذه العمليات تتطلب شرطا خاصا لكي تتم عملية الضرب.

### أولاً : جمع وطرح المصفوفات : Addition & Subtraction

مثال (٦) :

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} = \text{ج} ، \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} ، \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فأوجد:

$$-1 \quad -2 \quad -3$$

$$-1 \quad -2 \quad -3$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \quad -2 \quad -3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -2 \quad -3 \quad -1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -3 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 9 \\ 1 & 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 9 & 3 \\ 24 & 3 & 0 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 8 & 2 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

مثال (٧) :

إذا كان:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(i) أوجد 'أ' ، 'ب'

(ii) أثبت أن : ('أ' + 'ب') = ('أ' + 'ب')

الحل :

( i )

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 1- & 2 & 5 \end{bmatrix} = \text{'ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \text{'أ}$$

$$\text{'(ب + أ)} = \text{'ب} + \text{'أ} \text{ ( ii )}$$

الطرف الأيمن = 'ب + 'أ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 1- & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

الطرف الأيسر = ' (ب + أ)

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1- & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1- & 0 \\ 4 & 1 & 1- \end{bmatrix} = \text{( ب + أ )}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \text{'(ب + أ)}$$

وبالتالى فإن :

$$\text{'(ب + أ)} = \text{'ب} + \text{'أ}$$

مثال ( ٨ ) :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6- & 4- \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ} \quad : \text{ إذا كان}$$

فاحسب :  $I^3 + 5B - 3A$

الحل :

$$= I^3 + 5B - 3A$$

$$3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & 9 \\ 42 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} =$$

مثال (٩) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = ج ، \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = ب ، \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = أ$$

أثبت أن :  $'أ + 'ب + 'ج = '(أ + ب + ج)$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = أ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = أ$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = ب \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = ب$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = ج \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = ج$$

الطرف الأيمن =  $'أ + 'ب + 'ج$



$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & 6- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

الطرف الأيسر = أ + ب + ج

$$\left( \begin{bmatrix} 6- & 4 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \right)' = \left( \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4- & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1- \end{bmatrix} \right)' =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & 6- \end{bmatrix} = '(أ + ب + ج)$$

أى أن : 'أ + 'ب + 'ج = '(أ + ب + ج)

### ثانياً : ضرب المصفوفات : Multiplication of Matrices

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة تكون فى هذه الحالة من الدرجة (عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية) ومثال ذلك :

$$3 \times 2 \text{ ج} = 3 \times 3 \text{ ب} \times 3 \times 2 \text{ أ}$$

$$3 \times 3 \text{ ج} = 3 \times 1 \text{ ب} \times 1 \times 3 \text{ أ}$$

$$3 \times 3 \text{ ج} = 3 \times 2 \text{ ب} \times 2 \times 3 \text{ أ}$$

مثال (١٠) :

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \end{bmatrix} = \text{ب} , \quad \begin{bmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد : ج = أ ب

الحل :

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة أ = ٢

حيث عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

يمكن إيجاد حاصل الضرب ج = أ ب ، حيث :

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{bmatrix} = \text{ج}$$

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} \times \text{ب}_{21} + \text{أ}_{12} \times \text{ب}_{22} & \text{أ}_{11} \times \text{ب}_{11} + \text{أ}_{12} \times \text{ب}_{12} \\ \text{أ}_{21} \times \text{ب}_{21} + \text{أ}_{22} \times \text{ب}_{22} & \text{أ}_{21} \times \text{ب}_{11} + \text{أ}_{22} \times \text{ب}_{12} \\ \text{أ}_{31} \times \text{ب}_{21} + \text{أ}_{32} \times \text{ب}_{22} & \text{أ}_{31} \times \text{ب}_{11} + \text{أ}_{32} \times \text{ب}_{12} \end{bmatrix} = \text{ج}$$

العنصر ج<sub>١١</sub> = أ<sub>١١</sub> × ب<sub>١١</sub> + أ<sub>١٢</sub> × ب<sub>٢١</sub> حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في العناصر المناظرة لها في العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر ج<sub>٢١</sub> = أ<sub>٢١</sub> × ب<sub>١١</sub> + أ<sub>٢٢</sub> × ب<sub>٢١</sub> حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في العناصر المناظرة لها في العمود الثاني من المصفوفة الثانية.

العنصر ج<sub>٣١</sub> = أ<sub>٣١</sub> × ب<sub>١١</sub> + أ<sub>٣٢</sub> × ب<sub>٢١</sub> حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة الأولى في العناصر المناظرة لها في العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر ج-٢٢ = أ١٢ × ب٢١ + أ٢٢ × ب٢٢ حصلنا عليه بضرب  
عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى  
العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

العنصر ج-١٣ = أ١٣ × ب١١ + أ٢٣ × ب١٢ حصلنا عليه بضرب  
عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى  
العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر ج-٢٣ = أ١٣ × ب٢١ + أ٢٣ × ب٢٢ حصلنا عليه بضرب  
عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى  
العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

والأمثلة الآتية توضح كيفية ضرب مصفوفتين.

**مثال (١١) :**

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1- \\ 6 & 2- \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد :

( i )      أ ب      ( ii )      ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

**الحل :**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1- \\ 6 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1- \end{bmatrix} = \text{أ ب ( i)}$$

-180-

$$\begin{bmatrix} (6 \times 3) + (4 \times 2) & (2 - \times 3) + (1 - \times 2) \\ (6 \times 5) + (4 \times 1 -) & (2 - \times 5) + (1 - \times 1 -) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 8 - \\ 26 & 9 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 8 & 6 - 2 - \\ 30 + 4 - & 10 - 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 - \\ 6 & 2 - \end{bmatrix} = \text{ب أ (ii)}$$

$$\begin{bmatrix} (5 \times 4) + (3 \times 1 -) & (1 - \times 4) + (2 \times 1 -) \\ (5 \times 6) + (3 \times 2 -) & (1 - \times 6) + (2 \times 2 -) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 6 - \\ 24 & 10 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 3 - & 4 - 2 - \\ 30 + 6 - & 6 - 4 - \end{bmatrix} =$$

(iii) أ ب  $\neq$  ب أ

مثال (١٢) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 - & 1 \\ 2 - & 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 - \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد :

(i) أ ب

(ii) ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

الحل :

$$\begin{bmatrix} 6 - & 7 & 1 - \\ 2 - & 3 & 0 \\ 4 - & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 - & 1 \\ 2 - & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 - \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ ب (i)}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{ب أ} \quad \text{(ii)}$$

(iii) أ ب  $\neq$  ب أ وواضح أنهما من درجتين مختلفتين.

**مثال (١٣) :**

إذا كان:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \\ 12 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فأوجد : أ ب

**الحل :**

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة ( أ ) لا يساوي عدد صفوف المصفوفة

(ب) وبالتالي فإنه لا يمكن إجراء عملية الضرب لأنها غير معرفة. هل يمكن

إيجاد حاصل الضرب ب أ ؟ ولماذا ؟

**مثال (١٤) :**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{I} \quad , \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \text{إذا كان :}$$

أوجد :

(ii) أ I

(i) أ I

**الحل :**

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I} \hat{\text{A}} \text{ (i)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\text{A}} \text{I (ii)}$$

أى أنه عند ضرب أية مصفوفة فى مصفوفة الوحدة من اليمين أو من اليسار، فإن حاصل الضرب يعطى نفس المصفوفة أى أن :

$$\hat{\text{A}} = \text{I} \hat{\text{A}} \quad \text{(i)}$$

$$\hat{\text{A}} = \hat{\text{A}} \text{I} \quad \text{(ii)}$$

**مثال (١٥) :**

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{ج} , \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \text{ب} , \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أثبت أن :  $(\text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}) = \text{ج} \times \text{ب} \times \text{أ}$

**الحل :**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ}' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب}' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{ج}' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{ج}$$

الطرف الأيمن = ( أ × ب × ج )'

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 9 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 16 & 34 \\ 28 & 60 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 34 \\ 28 & 16 \end{bmatrix} =$$

الطرف الأيسر = ج' × ب' × أ'

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 34 \\ 28 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} =$$

وبالتالى فإن:

$$( أ × ب × ج )' = ج' × ب' × أ'$$

## ٤-٥ معكوس المصفوفة : Inverse of Matrix

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطرق الآتية :

١- باستخدام المحددات.

٢- طريقة جاوس.

- ٣- طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.
- ٤- طريقة العوامل المرافقة.
- ٥- طريقة التقسيم.

وجميع هذه الطرق المستخدمة فى إيجاد معكوس المصفوفة تعطى نفس النتيجة. غير أننا سوف نتناول هنا طريقتين فقط لإيجاد معكوس المصفوفة وهما:

### أولاً : طريقة العوامل المرافقة : Cofactors Method

وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات الآتية :

- ( i ) نوجد قيمة محدد المصفوفة (  $\Delta$  ).
- ( ii ) نوجد مصفوفة المرافقات.
- ( iii ) نوجد مدور مصفوفة المرافقات.
- ( iv ) نقسم مدور مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة فنحصل على معكوس المصفوفة (  $A^{-1}$  ).

مثال ( ١٦ ) :

أوجد معكوسة المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

لإيجاد معكوس المصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

- ( i ) نوجد محدد المصفوفة.



$$(3- \times 2) - (5- \times 1) = \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 5- & 2 \end{bmatrix} = \Delta$$

$$1 = 6 + 5- =$$

( ii ) نوجد مصفوفة المرافقات مع أخذ قاعدة الإشارات فى الاعتبار .

$$\begin{bmatrix} 2- & 5- \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & (5-)+ \\ 1+ & (3-)- \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

(iii) نوجد مبدول مصفوفة المرافقات :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \text{مبدول مصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = I^{-1} \quad (\text{iv})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{1} =$$

من المعروف أن حاصل ضرب المصفوفة فى معكوسها يساوى مصفوفة الوحدة. أى أن :

$$I = A^{-1} \times A = A \times A^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 5- & 2 \end{bmatrix} = A^{-1} A \\ & \begin{bmatrix} (1 \times 3-)+(3 \times 1) & (2- \times 3-)+(5- \times 1) \\ (1 \times 5-)+(3 \times 2) & (2- \times 5-)+(5- \times 2) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

-186-

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 6+5- \\ 5-6 & 10+10- \end{bmatrix} =$$

مثال (١٧) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

( i ) نوجد محدد المصفوفة باستخدام عناصر الصف الثانى.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 2 - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \Delta$$

$$(5 - 3) 2 - (1 - 20) 2 =$$

$$(2-) 2 - (19) 2 =$$

$$34 - = 4 + 38 - =$$

( ii ) نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ فى الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \end{array} \right] = \text{مصفوفة المرافقات}$$

$$\begin{bmatrix} (0-2) + (2-8) - (2-0) \\ (5-3) - (1-12) + (1-20) \\ (10-0) + (2-6) - (0-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

(iv) نقسم مبدول مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة ونحصل على معكوس المصفوفة المطلوب.

$$\begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{34-} = I^{-1}$$

ولكى نتأكد من صحة هذا الحل نقوم بضرب المصفوفة في معكوسها والنتيجة يجب أن تكون مصفوفة الوحدة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{34-} = I^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 34- \\ 0 & 34- & 0 \\ 34- & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{34-} =$$

ثانياً : طريقة العمليات المختصرة على الصفوف : **Row Reduction**

تستخدم طريقة العمليات المختصرة على الصفوف (التحويلات الصفية

المختصرة) لإيجاد معكوس المصفوفة. وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات

الآتية :

( i ) نضع المصفوفة المطلوب إيجاد معكوسها بجوار مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ويفصل بينهما خط رأسى، وتسمى المصفوفة الممتدة . Augmented matrix

( ii ) نقوم ببعض العمليات (التحويلات) على الصفوف حتى تتحول المصفوفة الأولى إلى مصفوفة الوحدة، وتتحول مصفوفة الوحدة إلى مصفوفة جديدة هي المعكوس المطلوب الحصول عليه للمصفوفة الأصلية.

مثال (١٨) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحل :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر ٢ فى الصف الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة الصف الأول على (٢).

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right]$$

نضرب الصف الأول فى (-٤) ونجمع الناتج على الصف الثانى ونحصل على :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر (-1) في الصف الثاني والعمود الثاني واحداً صحيحاً وذلك بضرب عناصر الصف الثاني في (-1).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر  $\left(\frac{3}{2}\right)$  في الصف الأول والعمود الثاني صفراً وذلك بضرب عناصر الصف الثاني في  $\left(\frac{3}{2}\right)$  وجمع الناتج على عناصر الصف الأول المناظرة فنحصل على.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{3}{2} & \frac{5}{2}- & 0 & 1 \\ & I & I & \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

ولكى نتحقق من الحل :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 6+5- \\ 5-6 & 10+10- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2}- \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = I \quad f$$

مثال (١٩) :

أوجد معكوس المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحل :

لإيجاد معكوس هذه المصفوفة سوف نستخدم طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر (٤) في الصف الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة عناصر الصف الأول على العدد (٤).

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- نجعل باقى عناصر العمود الأول أصفاراَ وذلك بتنفيذ العمليتين الآتيتين :
- ١- نضرب الصف الأول فى (-٦) ونجمع الناتج على الصف الثانى.
  - ٢- نضرب الصف الأول فى (-١) ونجمع الناتج على الصف الثالث.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر (-1) فى الصف الثانى والعمود الثانى واحداً صحيحاً  
موجباً وذلك بضرب عناصر الصف الثانى فى (-1).

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1- & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}- & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4}- & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

نجعل باقى عناصر العمود الثانى أصفاراً وذلك بضرب الصف الثانى فى  
 $\left(\frac{1}{2}-\right)$  ثم نجمع الناتج مرة على الصف الأول ومرة أخرى على الصف الثالث.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}- & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1- & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}- & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1- & \frac{18}{4} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

نجعل العنصر  $\left(\frac{18}{4}\right)$  بالصف الثالث والعمود الثالث واحداً صحيحاً وذلك  
بضرب عناصر الصف الثالث فى العدد  $\left(\frac{4}{18}\right)$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}- & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1- & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}- & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9}- & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

نجعل باقى عناصر العمود الثالث أصفاراً بتنفيذ العمليتين الآتيتين :

١- بضرب الصف الثالث في  $\left(\frac{3}{2}\right)$  وجمع الناتج على الصف الثاني.

٢- بضرب الصف الثالث في  $(-1)$  وجمع الناتج على الصف الأول.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{4}{18} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & \frac{4}{18} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 6 & 15 & 21 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{18} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & \frac{4}{18} \end{bmatrix} = I^{-1}$$

لاحظ أن :  $I^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 6 & 15 & 21 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right) = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right) =$$

مثال (٢٠) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \quad \text{إذا كان لدينا المصفوفة :}$$

أثبت أن :  $(A^{-1})^{-1} = A$



الحل :

الطرف الأيمن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}'$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{34} & \frac{6}{34} & \frac{2}{34} \\ \frac{2}{34} & \frac{11}{34} & \frac{19}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & \frac{10}{34} \end{bmatrix} = \text{أ}'^{-1}$$

الطرف الأيسر

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{34} & \frac{19}{34} & \frac{2}{34} \\ \frac{4}{34} & \frac{11}{34} & \frac{6}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{2}{34} & \frac{2}{34} \end{bmatrix} = \text{أ}'^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{34} & \frac{6}{34} & \frac{2}{34} \\ \frac{2}{34} & \frac{11}{34} & \frac{19}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & \frac{10}{34} \end{bmatrix} = \text{أ}'^{-1}$$

$$\text{أ}'^{-1} = \text{أ}'^{-1}$$

### ٥-٥ حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات :

تستخدم المصفوفات في حل المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر. وسوف نكتفى هنا بحل نظام من المعادلات في متغيرين أو ثلاثة متغيرات. هذا ويعتمد حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات على إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطريقتين اللتين تم دراستهما من قبل في هذا الباب.

### أولاً : حل نظام من المعادلات الخطية في متغيرين :

بافتراض أن لدينا المعادلتين الآتيتين :

$$أ_1س + ب_1ص = ج_1$$

$$أ_2س + ب_2ص = ج_2$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات كالتالي:

$$(١) \quad \begin{bmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{bmatrix} = أ \quad \text{نوجد مصفوفة المعاملات : } أ$$

$$(٢) \quad \begin{bmatrix} ج_1 \\ ج_2 \end{bmatrix} = ج \quad \text{نحدد عمود الثوابت : } ج$$

(٣) نجد معكوس مصفوفة المعاملات وذلك باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الصفوف أو طريقة العوامل المرافقة وليكن :

$$^{-1} \begin{bmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{bmatrix}$$

(٤) نحصل على قيمتي س ، ص باستخدام المعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} \text{ج}_1 \\ \text{ج}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

مثال (٢١) :

أوجد مجموعة الحل للنظام الآتي باستخدام المصفوفات.

$$٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ٨$$

$$٤ \text{ س} + ٥ \text{ ص} = ١١$$

الحل :

(١) نوجد مصفوفة المعاملات.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(٢) مصفوفة الثوابت .

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \text{ج}$$

(٣) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام طريقة العوامل المرافقة

كالآتي :

$$٢- = ١٢ - ١٠ = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{bmatrix} 4- & 5 \\ 2 & 3- \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

$$\begin{bmatrix} 3- & 5 \\ 2 & 4- \end{bmatrix} = \text{مبدول مصفوفة المرافقات}$$

معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3- & 5 \\ 2 & 4- \end{bmatrix} \frac{1}{2} - = ١-أ$$

(٤) نحصل على قيمتى س ، ص باستخدام المعادلة التالية :

$$ج \quad ١-أ = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 5 \\ 2 & 4- \end{bmatrix} \frac{1}{2} - = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 10- \end{bmatrix} \frac{1}{2} - = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\text{أى أن : س} = \frac{7}{2} - ، \text{ ص} = ٥$$

**ثانياً : حل نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة متغيرات :**

بفرض أن لدينا نظام المعادلات التالى فى ثلاثة متغيرات :

$$أ_١ س + ب_١ ص + ج_١ د = د_١$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص + ج_٢ د = د_٢$$

$$أ_٣ س + ب_٣ ص + ج_٣ د = د_٣$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات باستخدام المصفوفات كالاتى :

$$(i) \text{ مصفوفة المعاملات : أ } = \begin{bmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \text{ نحدد عمود الثوابت : د } = \begin{bmatrix} \text{د}_1 \\ \text{د}_2 \\ \text{د}_3 \end{bmatrix}$$

(iii) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات بأية طريقة وليكن :

$$\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \text{د}_1 \\ \text{د}_2 \\ \text{د}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{أ}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{أ}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} \quad (iv)$$

مثال (٢٢) :

حل نظام المعادلات الآتى باستخدام المصفوفات :

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = 1-$$

$$2 \text{ س} + 3 \text{ ص} - \text{ع} = \text{صفر}$$

$$3 \text{ س} - 2 \text{ ص} + \text{ع} = 4$$

الحل :

$$(i) \text{ مصفوفة المعاملات : أ } = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 3 & 2 \\ 1 & 2- & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = d \quad : \text{ عمود الثوابت ( ii )}$$

(iii) معكوس مصفوفة المعاملات يتم الحصول عليه بطريقة العوامل المرافقة (أو بأية طريقة أخرى) كالاتى :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 3 & 2 \\ 1 & 2- & 3 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} (9 - 4 -) + (3 + 2) 1 - (2 - 3) 1 &= \\ 17 - &= 13 - 5 - 1 = \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 3 \end{vmatrix} \right] = \text{مصفوفة المرافقات}$$

$$\begin{bmatrix} 13- & 5- & 1 \\ 5 & 2- & 3- \\ 1 & 3 & 4- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4- & 3- & 1 \\ 3 & 2- & 5- \\ 1 & 5 & 13- \end{bmatrix} = \text{مبدول مصفوفة المرافقات}$$

معكوس مصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} 4- & 3- & 1- \\ 3 & 2- & 5- \\ 1 & 5 & 13- \end{bmatrix} \frac{1}{17} - = ١-أ$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4- & 3- & 1- \\ 3 & 2- & 5- \\ 1 & 5 & 13- \end{bmatrix} \frac{1}{17} - = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 1- \\ 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17- \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix} \frac{1}{17} - = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix}$$

$$١- = ع ، ١- = ص ، ١ = س$$

### ٦-٥ تطبيقات اقتصادية وتجارية : Applications

تلعب المصفوفات دوراً حيوياً وهاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالي إيجاد الحلول المناسبة لهذه العلاقات. فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هى الأساس فى صياغة نماذج المنتج والمستخدم Input - Output Models ، وكذلك صياغة سلاسل ماركوف Markov Chains .

ومن هذا المنطلق سوف نقدم بعض الأمثلة التطبيقية حتى يلمس الدارس مدى الاستفادة من رياضة المصفوفات فى المجال التطبيقى والواقع العملى.

مثال (٢٣) :

تنتج شركة الأحلام للثلجات نوعين من الثلجات هما ثلاجة ١٠ قدم وثلجة ١٢ قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة ١٠ قدم تحتاج ٤ ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة ١٢ قدم تحتاج إلى ٥ ساعات عمل في مرحلة التصنيع و ٣ ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي ٢٤٠٠ ساعة لمرحلة التصنيع، ١٣٠٠ ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل :

يمكن تلخيص بيانات المشكلة في الجدول التالي.

النوع	مرحلة الإنتاج	التصنيع	التشطيب
١٠ قدم	٤	٢	
١٢ قدم	٥	٣	
الساعة المتاحة	٢٤٠٠	١٣٠٠	

بفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة ١٠ قدم = س وحدة

وأن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة ١٢ قدم = ص وحدة

فإن المعادلات الآتية تمثل النظام :

$$٢٤٠٠ = ٤س + ٥ص$$

$$١٣٠٠ = ٢س + ٣ص$$



وهو نظام معادلات خطية في متغيرين ويمكن حل هذا النظام باستخدام طريقة المصفوفات كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ : مصفوفة المعاملات}$$

$$\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix} = \text{ج : عمود الثوابت}$$

$$\begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \text{معكوس مصفوفة المعاملات}$$

$$\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

إذن لكي تحقق شركة الأحلام للثلجات الخطة الإنتاجية يجب أن تنتج ٣٥٠ ثلاثجة من النوع ١٠ قدم، ٢٠٠ ثلاثجة من النوع ١٢ قدم.

**مثال (٢٤) :**

تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات. وكل نوع له ٣ أحجام صغير، متوسط، كبير. والجدول التالي يبين الإنتاج (بالآلاف) في المصنع الأول.

النوع	الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول		٢٠	٢٨	٣٠
الثاني		١٦	٢٢	٢٠

كما يبين الجدول التالي مستوى الإنتاج (بالآلاف) فى المصنع الثانى.

النوع	الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول		٣٠	٤٠	٣٦
الثانى		٢٤	٢٠	٢٨

والمطلوب :

(١) أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج الكلى فى كلا المصنعين.

(٢) إذا قررت الشركة أن تفتتح مصنعاً ثالثاً بطاقة إنتاجية تزيد ٢٠% عن طاقة المصنع الثانى. أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج فى المصنع الثالث.

(٣) حدد المصفوفة التى تعبر عن حجم الإنتاج الكلى فى الشركة.

**الحل :**

(١) مستوى الإنتاج فى المصنعين معاً يساوى إنتاج المصنع الأول مضافاً إليه إنتاج المصنع الثانى.

$$\begin{bmatrix} 66 & 68 & 50 \\ 48 & 42 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

أى ينتج المصنعين معاً : ٥٠ وحدة حجم صغير من النوع الأول.

٦٨ وحدة حجم متوسط من النوع الأول.

٦٦ وحدة حجم كبير من النوع الأول.

٤٠ وحدة حجم صغير من النوع الثانى.

٤٢ وحدة حجم متوسط من النوع الثانى.

٤٨ وحدة حجم كبير من النوع الثانى.

(٢) حيث أن المصنع الثالث طاقته الإنتاجية تزيد ٢٠% عن طاقة المصنع الثانى فإنه لإيجاد طاقة المصنع الثالث الإنتاجية نضرب مستوى إنتاج المصنع الثانى فى (١,٢٠).

$$\begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} ١,٢٠ = \text{الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث}$$

$$\begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix} =$$

(٣) الطاقة الإجمالية للشركة ككل = الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثانى + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث.

$$\begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 109.2 & 116 & 86 \\ 81.6 & 66 & 68.8 \end{bmatrix} =$$

### تمارين على الباب الخامس

(١) إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1- & 2 & 4 \\ 1- & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1- \\ 1 & 1- & 1 \end{bmatrix} = \text{ج}$$

أوجد :

$$\text{أ} ٢ - \text{ب} ٣ + \text{ج} \quad (\text{i})$$

$$\text{أ ب، ب أ. هل أ ب = ب أ؟} \quad (\text{ii})$$

$$\text{أ} ٣ - \text{أ} ٤ + \text{ب} ٥ \quad (\text{iii})$$

$$[2 \ 3 \ 1-] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times ٢ \quad (\text{i}) \quad (٢)$$

$$\text{ماذا تلاحظ؟} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ 1-] \times ٢ \quad (\text{ii})$$

أحسب معكوس المصفوفات الآتية بطريقتين :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 3- & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix} \quad (٣)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2- & 5 \end{bmatrix} \quad (٤)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٥)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3- \end{bmatrix} \quad (٦)$$

أضرب المصفوفات الآتية :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1- \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (٧)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1- \\ 2- & 3- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 1- & 3 \\ 3- & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (٨)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1- \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2- \end{bmatrix} \quad (٩)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\begin{bmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 4 & 1- & 2 \\ 2- & 5 & 3- \end{bmatrix} 2- \text{ I } \text{ ٣} \quad (١٠)$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 1 & 0 \\ 7 & 2- & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3- & 1- & 1 \\ 5 & 4 & 2- \end{bmatrix} \quad (١١)$$

$$\begin{bmatrix} 4- & 2 & 1- \\ 2 & 1- & 2 \\ 1- & 2- & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4- & 1- & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (١٢)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 0 \end{bmatrix} 3+ \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} ٢ \quad (١٣)$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 2- & 3- \\ 3 & 0 \end{bmatrix} 2- \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3- \\ 4- & 6 \end{bmatrix} ٣ \quad (١٤)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4- \end{bmatrix} 2+ \begin{bmatrix} 2- & 1 & 0 \\ 4 & 2- & 3 \\ 3 & 5 & 2- \end{bmatrix} ٣ \quad (١٥)$$

$$15 - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 1- & 5- & 2 \\ 3 & 2- & 0 & 1- \\ 7 & 6 & 3- & 4- \end{bmatrix} \text{ ٤} \quad (١٦)$$

أوجد قيم س ، ص ، ع التي تحقق المتساويات الآتية :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \text{س} \\ \text{ص} & 3 \end{bmatrix} \quad (١٧)$$

$$\begin{bmatrix} ع & 2+ص \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 0 & س \end{bmatrix} \quad (١٨)$$

$$\begin{bmatrix} 3ص+2س- & 1 \\ 3 & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & س+ص \\ 3 & 1- \end{bmatrix} \quad (١٩)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} [3 \ 2] \quad (٢٠)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1- \\ 0 & 3 \end{bmatrix} [1- \ 0 \ 2] \quad (٢١)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (٢٢)$$

$$\begin{bmatrix} 2- \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 4 & 3 \\ 6 & 2- \end{bmatrix} \quad (٢٣)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 2 \\ 3 & 1- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 0 & 1 \\ 1 & 2- & 0 \\ 0 & 1 & 2- \end{bmatrix} \quad (٢٤)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2- & 0 \\ 0 & 1- & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2- & 3 & 1- \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (٢٥)$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 2 \\ 3- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 3 & 2- & 1- \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2- & 0 & 1 \\ 1- & 5 & 1 & 3- \\ 3 & 1- & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1- & 2 \\ 6 & 3- & 5- \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 2- & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 1 & 2 \\ 0 & 1- & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3- & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1- & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1- & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 2- \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3- & 5 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 1 & 2 & 3- \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1- \end{bmatrix} \right)^{3+} \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

أحسب : أ<sup>٢</sup> + أ<sup>٢</sup> - أ<sup>٣</sup> I حيث : (32)

$$\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أحسب : أ<sup>٢</sup> - أ<sup>٥</sup> - أ<sup>٢</sup> I حيث : (33)



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2- & 1- \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(٣٤) إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 3 & 2- \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد قيمة :

$${}^2(\text{ب} + \text{أ}) \quad (\text{i})$$

$${}^2\text{ب} + \text{أ}{}^2 + \text{ب}{}^2 + \text{أ} \quad (\text{ii})$$

$${}^2(\text{ب} + \text{أ}) = \text{ب}{}^2 + \text{أ}{}^2 + \text{ب}{}^2 + \text{أ} \quad (\text{iii})$$

أوجد المصفوفة أ التي تحقق كلا من المعادلات الآتية :

$$[3 \ 5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{أ} \quad (\text{٣٥})$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \text{أ} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1- & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{٣٦})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1- & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1- & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{٣٧})$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{أ} \quad (\text{٣٨})$$

(٣٩) إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 1- & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد قيمة س ، ص بحيث :

$$(i) \quad \text{أ} + \text{ب} = 2$$

$$(ii) \quad \text{أ} - \text{ب} = (\text{أ} + \text{ب})$$

أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظم المعادلات الخطية الآتية بطريقة المصفوفات :

$$(٤٠) \quad 3س - 1ص = 2$$

$$2س - 3ص = 3$$

$$(٤١) \quad 4س + 5ص = 14$$

$$3ص + س = 7$$

$$(٤٢) \quad 2(س - ص) - 5 = 3ص$$

$$4(1 - ص) - 3س = 3ص$$

$$(٤٣) \quad 3س + 2ص - 1 = 3ص$$

$$4ص + 2س - 3 = 3ص$$

$$(٤٤) \quad 4س - 3ص = 1$$

$$3س + ص = 5$$

$$(٤٥) \quad 2س - 5ص = 1$$

$$٥ = ص٤ + س٣$$

$$٤ = ص٢ - س٣ \quad (٤٦)$$

$$ص٣ = ٥ + س٤ - ص٣$$

$$٩ = ع٤ + ص٦ - س٢ \quad (٤٧)$$

$$٥ = ع٢ - ص٣ + س٣$$

$$٣ = ع٦ + ص٩ - س٣$$

$$٣ = ع - ص - س٢ \quad (٤٨)$$

$$٦ = ع + ص٢ - س$$

$$٣- = ع٢ - ص + س$$

$$ص٦ = ١٥ - ع١٢ + ص٣ - س٦ \quad (٤٩)$$

$$ص٢ = ١٠ - ع٥ + ص٣ + س٢$$

$$ص٤ = ٢١ - ع٨ + ص٢ - س٤$$

إذا كان : (٥٠)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = ب \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = أ$$

أثبت أن : (i) (أ + ب) = 'أ + 'ب

(ii) (أ ب) = 'ب - 'أ

إذا كان : (٥١)

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{ج} ، \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{ب} ، \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أثبت أن : ( i ) ( أ + ب + ج ) = 'أ + 'ب + 'ج

$$( \text{ii} ) ( \text{أ ب ج} )^{-1} = \text{ج}^{-1} \text{ب}^{-1} \text{أ}^{-1}$$

أوجد معكوس المصفوفات الآتية (إن وجد) بطريقة العمليات المختصرة على الصفوف :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 21 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

(56) أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظامي المعادلات الآتية باستخدام الحاسب الآلي:

$$\text{ص} - \text{س} - \text{ع} + \text{ص} + \text{ع} - \text{ص} = 10 \quad (\text{أ})$$

$$\text{ص} + \text{س} + \text{ع} - \text{ص} + \text{ع} - \text{ص} = 10$$

$$\text{ص} - \text{س} - \text{ع} + \text{ص} + \text{ع} - \text{ص} = 21$$

$$\text{ص} - \text{س} - \text{ع} + \text{ص} + \text{ع} - \text{ص} = 9 \quad (\text{ب})$$

-213-

$$5 = 3s + v - 2e$$

$$3 = 3s - 9v + 6e$$