الباب السابع

التفاضل

Differentiation

الباب السابع

التفاضل

Differentiation

٧-١ مقـدمة : Introduction

فى الباب الثالث من هذا الكتاب عرّفنا الدالـة بأنها علاقة بين متغيرين أحدهما يسمى المتغير المستقل والآخر يسمى المتغير التابع الذى يعتمد فى تغيره على تغير المتغير المستقل.

فإذا فرضنا أن المتغير المستقل هو (س) والمتغير التابع هو (ص) فإن الصورة العامة للدالة تأخذ الشكل :

$$\text{ص} = \text{د}\ (\text{س})$$

فإذا حدث تغير صغير جداً فى قيمة المتغير المستقل (س) وليكن (Δ س) فإنه يحدث تبعاً لذلك تغير صغير جداً أيضاً فى قيمة المتغير التابع (ص) قدرة (Δ ص). نسبة التغير فى (ص) بالنسبة للتغير فى (س) يرمز لها بالرمز $\frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}}$.

ومن هنا يمكننا تعريف مشتقة الدالة بأنها نهاية النسبة $\frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}}$ عندما يؤول مقدار التغير فى (س) إلى الصفر (أى عندما Δ س $\leftarrow$ ٠). وتسمى عملية إيجاد المشتقة الأولى للدالة بعملية التفاضل ويرمز لها بالرمز $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

أو ص' أو د' (س) أو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ [د (ص)] حيث :

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

ومما لا شك فيه أن علم التفاضل ذو أهمية بالغة فى الكثير من فروع العلم المختلفة مثل الرياضيات والفيزياء والاقتصاد وغيرها. فنحن فى علم الاقتصاد مثلا نستخدم ألفاظاً اقتصادية مثل المنفعة الحدية، والتكلفة الحدية، والإيراد الحدى، فما علاقة هذه المصطلحات الاقتصادية بعلم التفاضل ؟ وللإجابة على هذا السؤال نتناول المثال التالى لكى يوضح لنا هذه العلاقة.

نحن نعلم أن العلاقة بين التكاليف وحجم الإنتاج هى علاقة دالية حيث أن عدد الوحدات المنتجة (س) هو المتغير المستقل والتكاليف (ص) هى المتغير التابع. فإذا زاد حجم الإنتاج زادت التكاليف تبعاً لذلك. فإذا فرض أن الكمية المنتجة (س) زادت بمقدار صغير جداً فإن التكاليف تزيد بمقدار صغير جداً أيضاً وتكون التكاليف الحدية هى نهاية النسبة بين الزيادة فى التكاليف والزيادة فى حجم الإنتاج عندما تقترب الزيادة فى حجم الانتاج من الصفر. أى أن التكاليف الحدية هى المعامل التفاضلى الأول لدالة التكاليف. وأيضاً الإيراد الحدى هو المعامل التفاضلى الأول لدالة الإيراد، والربح الحدى هو المعامل التفاضلى الأول لدالة الربح وهكذا.

٧-٢ إيجاد المشتقة الأولى باستخدام المبادئ الأولية :

على فرض أن لدينا الدالة :

$$ص = د (س) \qquad (١)$$

فإذا حدث تغير ضئيل فى قيمة المتغير (س) قدره (Δ س) فإنه يحدث تغير ضئيل مناظر له فى قيمة المتغير (ص) قدره (Δ ص) وتصبح الدالة :

$$ص + \Delta ص = د(س + \Delta س) \qquad (٢)$$

بطرح (١) من (٢) ينتج أن :

$$\Delta ص = د(س + \Delta س) - د(س)$$

بقسمة الطرفين على Δ س ينتج أن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما Δ س $\leftarrow$ صفر

$$\underset{\Delta س \to 0}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{\Delta س \to 0}{نها} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \underset{\Delta س \to 0}{نها} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س} \qquad (٣)$$

وتعرف الصورة (٣) بالمشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلى الأول.

مثال (١) :

باستخدام المبادئ الأولية، أوجد المعامل التفاضلى الأول للدالة

$$ص = س^{٢} + ١$$

الحل :

نفرض أن المتغير المستقل (س) تغير بمقدار صغير جداً قدره (Δ س) فإن المتغير التابع (ص) يتغير أيضاً بمقدار صغير جداً قدره (Δ ص).

$$ص = س^{٢} + ١ \qquad (١)$$

$$ص + \Delta ص = (س + \Delta س)^٢ + ١$$

$$ص + \Delta ص = س^٢ + ٢ س \Delta س + (\Delta س)^٢ + ١ \qquad (٢)$$

بطرح (١) من (٢)

$$\Delta ص = ٢ س \Delta س + (\Delta س)^٢$$

بقسمة الطرفين على Δ س

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{2 س \Delta س + (\Delta س)^2}{\Delta س}$$

$$= \frac{\Delta س (2س + \Delta س)}{\Delta س}$$

$$= ٢ س + \Delta س$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما Δ س تؤول إلى الصفر.

$$\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to 0} (٢ س + \Delta س)$$

$$ص' = ٢ س$$

٧-٣ القواعد الأساسية لحساب التفاضل :

نظراً لأن عملية حساب المشتقة الأولى للدالة باستخدام المبادئ الأولية عملية مطولة وشاقة فإنه يوجد بعض القواعد التى تستخدم فى إيجاد هذه المشتقة بطريقة أسهل وأسرع وذلك دون استخدام النهايات. وسوف نفترض أن الدوال التى سوف نتعامل معها قابلة للاشتقاق.

قاعدة [١] : مشتقة المقدار الثابت :

إذا كان **د (س)** = أ ، حيث أ مقدار ثابت

فإن **د' (س) = صفر**

مثال (٢) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

د (س) = ٩

الحل :

باستخدام قاعدة [١] نجد أن :

د' (س) = صفر

قاعدة [٢] : مشتقة الدالة سن : Power Function

إذا كان د (س) = سن ، حيث ن عدد حقيقى

فإن د' (س) = ن سن−١

مثال (٣) :

أوجد المشتقة الأولى الدوال الآتية :

(i) ص = س٣ + ٥ (ii) ص = س $^{\frac{5}{2}}$

(iii) ص = س (iv) ص = س−٧

الحل :

(i) ص = س٣ + ٥

ص' = ٣ س٣−١ = ٣ س٢

لاحظ أن تفاضل القيمة ٥ = صفر لأنها مقدار ثابت.

(ii) ص = س $^{\frac{5}{2}}$

$$ص' = \frac{5}{2} س^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} س^{\frac{3}{2}}$$

(iii) $ص = س$

$$ص' = س^{١-١} = س^{صفر} = ١$$

(iv) $ص = س^{-٧}$

$$ص' = -٧ س^{-٧-١} = -٧ س^{-٨}$$

قاعدة [٣] : المشتقة الأولى لمقدار ثابت مضروباً فى دالة يساوى هذا المقدار الثابت مضروباً فى مشتقة هذه الدالة.

مثال (٤) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$ص = ٥ س^{٣}$$

الحل :

$$ص' = ٥ \times ٣ س^{٣-١}$$
$$= ١٥ س^{٢}$$

قاعدة [٤] : المشتقة الأولى للمجموع الجبرى لدالتين تساوى المجموع الجبرى لمشتقة كل منها.

مثال (٥) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$ص = ٧ س^{٣} + ٥ س^{٢}$$

الحل :

$$ص' = ٧ \times ٣ س^{٢} + ٥ \times ٢ س$$

$= ٢١$ س^{٢} $+$ ١٠ س

قاعدة [٥] : المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين :

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى

مثال (٦) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية :

ص = (٣ س^{٢} − ١) (٢ س^{٣} + ٣)

الحل :

نلاحظ أن هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين هما :

الدالة الأولى = (٣ س^{٢} − ١)

الدالة الثانية = (٢ س^{٣} + ٣)

ص' = الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى

= (٣ س^{٢} − ١) × ٦ س^{٢} + (٢ س^{٣} + ٣) × ٦ س

= ١٨ س^{٤} − ٦ س^{٢} + ١٢ س^{٤} + ١٨ س

= ٣٠ س^{٤} − ٦ س^{٢} + ١٨ س

مثال (٧) :

أحسب المشتقة الأولى للدالة :

ص = (س − ١) (٣ س − ٢) (٢ س − ٣)

الحل :

هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب ثلاث دوال وبتطبيق قاعدة حاصل ضرب الدالتين فإن :

الدالة الأولى = (س − ١)

الدالة الثانية = (٣ س − ٢) (٢ س − ٣)

وهى بدورها تعتبر حاصل ضرب دالتين

ص' = (س − ١) [(٣ س − ٢) × ٢ + (٢ س − ٣) × ٣]

+ (٣ س − ٢) (٢ س − ٣) × ١

= (س − ١) [٦ س − ٤ + ٦ س − ٩] + (٣ س − ٢) (٢ س − ٣)

= (س − ١) (١٢ س − ١٣) + (٣ س − ٢) (٢ س − ٣)

= ١٢ $س^{٢}$ − ٢٥ س + ١٣ + ٦ $س^{٢}$ − ١٣ س + ٦

= ١٨ $س^{٢}$ − ٣٨ س + ١٩

قاعدة [٦] : تفاضل خارج قسمة دالتين :

تفاضل خارج قسمة دالتين = (المقام × تفاضل البسط − البسط × تفاضل المقام) ÷ مربع المقام

مثال (٨) :

أوجد تفاضل الدالة الآتية :

$$ص = \frac{3س^{2} + س - 2}{س^{2} + 1}$$

الحل :

بتطبيق قاعدة تفاضل خارج قسمة دالتين نجد أن :

ص' = (المقام × تفاضل البسط − البسط × تفاضل المقام) ÷ (مربع المقام)

= [(س^{٢} + ١) (٦ س + ١) − (٣ س^{٢} + س − ٢) (٢ س)]

÷ (س^{٢} + ١)^{٢}

= [٦ س^{٣} + ٦ س + س^{٢} + ١ − (٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ س)]

÷ (س^{٢} + ١)^{٢}

= [٦ س^{٣} + ٦ س + س^{٢} + ١ − ٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤ س)]

÷ (س^{٢} + ١)^{٢}

= [− س^{٢} + ١٠ س + ١] / (س^{٢} + ١)^{٢}

قاعدة [٧] : تفاضل دالة الدالة : The Chain Rule

إذا كان لدينا الدالة : **ص = د (ع)**

والدالة : **ع = د (س)**

فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

ويمكن تطبيق هذه القاعدة إذا كان لدينا دالتين أو أكثر فإذا كان :

ص = د (ع)

ع = د (م)

م = د (س)

فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$

مثال (٩) :

إذا كان : ص = ٣ ع^{٢} + ١

ع = ٥ س − ١

أوجد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$$\text{ص} = ٣\,\text{ع}^{٢} + ١ \iff \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = ٦\,\text{ع}$$

$$\text{ع} = ٥\,\text{س} - ١ \iff \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٥$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$= ٦\,\text{ع} \times ٥$$

$$= ٦\,(٥\,\text{س} - ١) \times ٥$$

$$= ١٥٠\,\text{س} - ٣٠$$

مثال (١٠) :

إذا كان : $\text{ص} = ٢\,\text{ع}^{٢} + ١$

$$\text{ع} = ٣\,\text{م}^{٢}$$

$$\text{م} = \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}$$

أوجد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$$\text{ص} = ٢\,\text{ع}^{٢} + ١ \iff \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = ٤\,\text{ع}$$

$$\text{ع} = ٣\,\text{م}^{٢} \iff \frac{\text{د ع}}{\text{د م}} = ٦\,\text{م}$$

$$\text{م} = \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} \iff \frac{\text{د م}}{\text{د س}} = ٢\,\text{س} + ٢$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د م} \times \frac{د م}{د س}$$

$$= ٤ ع \times ٦ م \ (٢ س + ٢)$$

$$= ٤ \ (٣ م^{٢}) \times ٦ م \ (٢ س + ٢)$$

$$= ٤ \times ٣ \ (س^{٢} + ٢ س)^{٢} \times ٦ \ (س^{٢} + ٢ س)$$

$$\times \ (٢ س + ٢)$$

$$= ٧٢ \ (س^{٢} + ٢ س)^{٢} \ (س^{٢} + ٢ س) \ (٢ س + ٢)$$

$$= ٧٢ \ (س^{٢} + ٢ س)^{٤}$$

مثال (١١) :

إذا كان : $ص = (س^{٢} + ٣)^{١٠}$

أوجد : $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

نفرض أن : $ع = س^{٢} + ٣$

أى أن : $ص = ع^{١٠}$

وحيث أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$$= ١٠ \ ع^{٩} \times ٢ س$$

$$= ١٠ \ (س^{٢} + ٣)^{٩} \times ٢ س$$

$$= ٢٠ س \ (س^{٢} + ٣)^{٩}$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا الدالة :

$$\mathbf{ص = [\, د \ (س) \,]^{ن}}$$

فإن :

$$\frac{دص}{د س} = ن\ [ع\ (س)]^{ن-١} \times \frac{د\ ع}{د\ س}$$

مثال (١٢) :

إذا كان : $ص = (٧\ س^{٣} + ٢\ س^{٢} + ٣)^{١٥}$

أوجد : $\frac{د\ ص}{د\ س}$

الحل :

$$ص = (٧\ س^{٣} + ٢\ س^{٢} + ٣)^{١٥}$$

$$\frac{دص}{د س} = ١٥\ (٧\ س^{٣} + ٢\ س^{٢} + ٣)^{١٤}\ (٢١\ س^{٢} + ٤\ س)$$

قاعدة [٨] : تفاضل مقلوب الدالة : Inverse Function

إذا كان لدينا الدالة

$$ص = د\ (س)$$

فإن : $\frac{د س}{د ص} = ١ \div \frac{د\ ص}{د س}$

مثال (١٣) :

إذا كان : $ص = ٤\ س^{٣} + ١$

أوجد : $\frac{د س}{د ص}$

الحل :

$$ص = ٤\ س^{٣} + ١$$

$$\frac{دص}{د س} = ١٢\ س^{٢}$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{1}{12 س^2}$$

قاعدة [٩] : تفاضل الدالة الضمنية : Implicit Function

الدالة : ص = ٣ س^{٢} + ٥ س – ١ دالة صريحة (Explicit function) حيث تحدد قيمة (ص) مباشرة متى علم قيمة (س). فإذا أخذت الدالة الصورة

$$\text{ص} - ٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١ = \text{صفر}$$

فإنها تعتبر علاقة دالية ضمنية بين س ، ص . ولإيجاد تفاضل الدالة الضمنية يتم تفاضل كل حد على حدة بالنسبة للمتغير س كما سبق. غير أنه بالنسبة للحد الذى يحتوى على (ص) يراعى ما يلى :

$$\frac{د}{د س}\left[ص^{ن}\right] = ن ص^{ن-1} \quad \frac{د ص}{د س}$$

$\frac{د ص}{د س}$ للدالة الضمنية ص – ٣ س^{٢} – ٥ س + ١ = صفر يتم حسابها كالآتى :

$$\frac{د ص}{د س} - ٦ \text{ س} - ٥ = \text{صفر}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٦ \text{ س} + ٥$$

مثال (١٤) :

أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ للدالة :

$$ص^{٢} + ص\,س^{٢} + س + ٧ = \text{صفر}$$

الحل :

$$٢ص \frac{دص}{دس} + [ص \times ٢ س + س^{٢} \times \frac{دص}{دس}] + ١ = صفر$$

$$٢ ص \frac{دص}{دس} + [٢ س ص + س^{٢} \frac{دص}{دس}] + ١ = صفر$$

$$٢ ص \frac{دص}{دس} + ٢ س ص + س^{٢} \frac{دص}{دس} + ١ = صفر$$

بتجميع الحدود التى تحتوى على $\frac{دص}{دس}$ فى الطرف الأيمن وباقى الحدود فى الطرف الأيسر ينتج أن :

$$٢ ص \frac{دص}{دس} + س^{٢} \frac{دص}{دس}] = -٢ س ص - ١$$

$$\frac{دص}{دس} (٢ ص + س^{٢}) = -٢ س ص - ١$$

$$\frac{دص}{دس} = (-٢ س ص - ١) / (٢ ص + س^{٢})$$

قاعدة [١٠] : تفاضل الدالة الأسية : Exponential function

إذا كان لدينا الدالة الأسية **ص = هـ$^{د(س)}$** فإن :

$$\mathbf{ص' = هـ^{د(س)} \times د' (س)}$$

حيث هـ الأساس الطبيعى للدوال الأسية واللوغاريتمية، هـ = ٢,٧١٨ وهذا معناه :

أن تفاضل الدالة الأسية يساوى نفس الدالة الأسية مضروبة فى تفاضل الأس.

مثال (١٥) :

أوجد مشتقة الدالة :ص = هـ^{-٣س}

الحل :

ص' = هـ^{-٣س} (-٣)

= - ٣ هـ^{-٣س}

مثال (١٦) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة : ص = س^٢ هـ^{٣س}

الحل :

بتطبيق قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين :

ص' = الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى

ص' = س^٢ × هـ^{٣س} × ٣ + هـ^{٣س} × ٢ س

= ٣ س^٢ هـ^{٣س} + ٢ س هـ^{٣س}

= س هـ^{٣س} (٣ س + ٢)

= س (٣ س + ٢) هـ^{٣س}

مثال (١٧) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة : ص = س^٣ ÷ هـ^س

الحل :

بتطبيق قاعدة تفاضل خارج قسمة دالتين نجد أن :

$$\text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times 3\text{س}^2 - \text{س}^3 \times \text{هـ}^{\text{س}}}{\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)^2}$$

$$= \frac{3س^2 ه^س - س^3 ه^س}{ه^{2س}}$$

$$= \frac{س^2 ه^س (3 - س)}{ه^{2س}}$$

$$= \frac{س^2 (3 - س)}{ه^س}$$

قاعدة [١١] : تفاضل الدالة اللوغاريتمية : Logarithmic function

إذا كان لدينا الدالة اللوغاريتمية :

ص = لوهـ [ع (س)]

فإن : **ص' = ١ ÷ [ع (س)] × ع' (س)**

وللتبسيط سوف نستخدم الرمز لو بدون الأساس الطبيعى هـ

مثال (١٨) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

ص = لو (س^{٢} + ١)

الحل :

$$ص' = \frac{1}{(س^2+1)} \times 2س = \frac{2س}{س^2+1}$$

مثال (١٩) :

أوجد تفاضل الدالة اللوغاريتمية الآتية :

ص = لو (لو س^{٢})

الحل :

$$ص' = \frac{1}{لو س^2} \times \frac{1}{س^2} \times ٢ س$$

$$= \frac{2}{س \ لو س^2}$$

مثال (٢٠) :

أوجد تفاضل الدالة :

$$ص = لو (٢ س + ١)^٥$$

الحل :

$$ص' = \frac{1}{(2س + 1)^5} \times 5(2س + 1)^4 \times ٢$$

$$ص' = \frac{10(2س + 1)^4}{(2س + 1)^5}$$

مثال (٢١) :

أوجد المعامل التفاضلى الأول للدالة :

$$ص = هـ^{س} لو س$$

الحل :

باستخدام قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين نجد أن :

$$ص' = هـ^{س} \times \frac{1}{س} + لو س \times هـ^{س}$$

$$ص' = \frac{1}{س} هـ^{س} + هـ^{س} لو س$$

مثال (٢٢) :

أوجد المعامل التفاضلى الأول للدالة :

$$\text{ص} = \frac{\text{لو س}^{2}}{\text{هـ}^{2\text{س}}}$$

الحل :

باستخدام قاعدة تفاضل خارج قسمة دالتين نجد أن :

$$\text{ص}' = \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}} \times 2\text{س} - \text{لو س}^{2} \times \text{هـ}^{2\text{س}} \times 2}{\left(\text{هـ}^{2\text{س}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\text{س}}\ \text{هـ}^{2\text{س}} - 2\ \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{لو س}^{2}}{\text{هـ}^{4\text{س}}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\text{س}} - \text{لو س}^{2}\right)}{\text{هـ}^{2\text{س}}}$$

٧-٤ تطبيقات اقتصادية وتجارية على المشتقة الأولى :

أولاً : التكاليف الكلية والمتوسطة والحدية :

من المعروف أن التكاليف الكلية هى مقدار ما يتحمله (ما يتكلفه) إنتاج حجم معين من الإنتاج. وهذه التكاليف تتكون من جزأين؛ الجزء الأول هو التكاليف المتغيرة وهى تعتمد على حجم الإنتاج، أى تزداد بزيادة هذا الحجم وتنقص بنقصانه، أما التكاليف الثابتة فهى التكلفة اللازمة لبدئ الإنتاج وهى لاتعتمد على حجم الإنتاج. فالتكاليف الثابتة لا تتغير بتغير حجم الإنتاج.

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

والتكاليف المتوسطة Average cost هى التكلفة الكلية مقسومة على عدد الوحدات المنتجة فإذا كانت التكاليف الكلية (ت) وعدد الوحدات المنتجة هو (س) فإن :

$$\textbf{التكاليف المتوسطة} \left(\bar{ت}\right) = \frac{ت}{س}$$

أما التكاليف الحدية فيمكن تعريفها بأنها تفاضل دالة التكاليف بالنسبة لكمية الإنتاج أى أن :

$$\textbf{التكاليف الحدية} = \frac{د ت}{د س}$$

مثال (٢٣) :

إذا كانت معادلة التكاليف الكلية (ت) فى مصنع صلاح الدين هى :

ت = ٢٣٠ + ٣ س + ٠,٢ س^{٢}

حيث : س : عدد الوحدات المنتجة

أوجد : (i) معادلة التكاليف الحدية.

(ii) أحسب التكاليف الحدية عندما س = ٥٠

الحل :

(i) معادلة التكاليف الحدية هى تفاضل دالة التكاليف

ت' = ٣ + ٠,٤ س

(ii) عندما س = ٥٠

التكاليف الحدية = ٣ + ٠,٤ (٥٠)

= ٣ + ٢٠ = ٢٣

ولإثبات ذلك نوجد التكلفة الكلية عندما س = ٥٠ ، والتكلفة الكلية عندما س = ٥١

عندما س = ٥٠

ت = ٢٣٠ + ٣ (٥٠) + ٠,٢ (٥٠)^{٢}

= ٢٣٠ + ١٥٠ + ٠,٢ (٢٥٠٠)

= ٢٣٠ + ١٥٠ + ٥٠٠

= ٨٨٠ جنيهاً

عندما س = ٥١

ت = ٢٣٠ + ٣ (٥١) + ٠,٢ (٥١)^{٢}

= ٢٣٠ + ١٥٣ + ٠,٢ (٢٦٠١)

= ٢٣٠ + ١٥٣ + ٥٢٠,٢

= ٩٠٣,٢ جنيهاً

تكلفة الوحدة رقم ٥١ = ٩٠٣,٢ – ٨٨٠ = ٢٣,٢ جنيهاً

وهى التكلفة الحدية عند حجم إنتاج ٥٠ وحدة.

ومن هنا نستطيع القول بأن التكلفة التى حصلنا عليها باستخدام المشتقة الأولى وهى ٢٣ تعتبر تقريباً دقيقاً.

والآن ما هو التفسير الاقتصادى لذلك ؟

التفسير الاقتصادى لذلك هو أن التكلفة الحدية عند إنتاج ٥٠ وحدة هى ٢٣ جنيهاً تعنى أن الوحدة الإضافية (الوحدة رقم ٥١) تكلف الشركة ٢٣ جنيهاً.

مثال (٢٤) :

إذا كانت دالـة التكـاليف المتوسـطة فـى مصـنع منيـرة لملابـس السـيدات بالجنيهات هى :

$$\bar{ت} = ٠,٠٠٠١\ س^{٢} - ٠,٠٣\ س + ٤ + ٤٠٠٠\ س^{-١}$$

حيث : $\bar{ت}$ التكلفة المتوسطة.

س عدد الوحدات المنتجة.

والمطلوب : (i) إيجاد دالة التكاليف الحدية.

(ii) حساب التكلفة الحدية عند إنتاج ٥٠ وحدة.

الحل :

لإيجاد دالة التكاليف الحدية نوجد دالة التكاليف الكلية أولاً :

التكاليف الكلية = التكاليف المتوسطة × عدد الوحدات المنتجة

$$ت = (٠,٠٠٠١\ س^{٢} - ٠,٠٣\ س + ٤ + ٤٠٠٠\ س^{-١}) \times س$$

$$= ٠,٠٠٠١\ س^{٣} - ٠,٠٣\ س^{٢} + ٤\ س + ٤٠٠٠$$

لإيجاد دالة التكاليف الحدية نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف :

$$ت' = ٠,٠٠٠٣\ س^{٢} - ٠,٠٦\ س + ٤$$

عندما س = ٥٠

$$ت' = ٠,٠٠٠٣\ (٥٠)^{٢} - ٠,٠٦\ (٥٠) + ٤$$

$$= ٠,٠٠٠٣\ (٢٥٠٠) - ٣ + ٤$$

$$= ٠,٧٥ - ٣ + ٤ = ٤,٧٥ - ٣ = ١,٧٥$$ جنيهاً

وهذا يعنى اقتصادياً : أنه لإنتاج وحدة واحدة إضافية بعد حجم الإنتاج ٥٠ وحدة فإن هذه الوحدة رقم ٥١ تكلف الشركة ١,٧٥ جنيهاً.

ثانياً : الإيراد الكلى والإيراد الحدى :

يعرف الإيراد الكلى بأنه عبارة عن حاصل ضرب السعر فى الكمية، أما الإيراد الحدى فيعرف بأنه عبارة عن المعامل التفاضلى الأول للإيراد الكلى.

مثال (٢٥) :

يبيع مصنع اللؤلؤة المنتج الذى ينتجه بسعر الوحدة ١٥ جنيهاً. أوجد إيراده الحدى عندما يبيع ٢٠٠ وحدة، وأيضاً عندما يبيع ٢٠٠٠ وحدة.

الحل :

الإيراد الكلى = السعر × عدد الوحدات المباعة

ى = ١٥ س

الايراد الحدى (ى') = ١٥

الايراد الحدى (عندما س = ٢٠٠) = ١٥ جنيهاً

الايراد الحدى (عندما س = ٢٠٠٠) = ١٥ جنيهاً

وذلك لأن دالة الإيراد الحدى دالة ثابتة.

ثالثاً : الميل الحدى للاستهلاك :

نحن نعلم أن هناك علاقة دالية بين الدخل القومى الكلى (خ) والاستهلاك القومى الكلى (ك) حيث يعتبر الدخل الكلى هو المتغير المستقل والاستهلاك الكلى هو المتغير التابع. ولذلك نقول أن الاستهلاك دالة فى الدخل. أى أن :

ك = د (خ)

ويعرف الميل الحدى للاستهلاك بأنه المعامل التفاضلى الأول لدالة الاستهلاك.

$$\frac{\text{د ك}}{\text{د خ}}$$

ويبين الميل الحدى للاستهلاك مدى تأثير التغير فى الدخل على التغير فى الاستهلاك.

وحيث أن :

الادخار = الدخل − الاستهلاك

ر = خ − ك

وبتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة للدخل خ

$$\frac{\text{د ر}}{\text{د خ}} = \frac{\text{د خ}}{\text{د خ}} - \frac{\text{د ك}}{\text{د خ}}$$

$$= ١ - \frac{\text{د ك}}{\text{د خ}}$$

ويعرف $\frac{\text{د ر}}{\text{د خ}}$ بالميل الحدى للادخار وهو يبين مدى تأثير التغير فى الدخل على التغير فى الادخار.

أى أن :

الميل الحدى للادخار + الميل الحدى للاستهلاك = ١

مثال (٢٦) :

إذا كانت دالة الاستهلاك تأخذ العلاقة :

$$\text{ك} = ٣ + ٢ \sqrt{\text{خ}}$$

أوجد الميل الحدى للادخار عند مستوى الدخل ٩٠ جنيهاً.

الحل :

الميل الحدى للادخار = ١ − الميل الحدى للاستهلاك

الميل الحدى للاستهلاك هو تفاضل دالة الاستهلاك بالنسبة للدخل (خ)

$$ك' = (خ)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{خ}}$$

$$\text{الميل الحدى للادخار} = ١ - \frac{1}{\sqrt{خ}}$$

عند مستوى الدخل ٩٠ جنيهاً فإن :

$$\text{الميل الحدى للادخار} = ١ - \frac{1}{\sqrt{90}}$$

$$= ١ - ٠,١٠٥ = ٠,٨٩٥$$

٧-٥ النهايات العظمى والصغرى :

تعتمد الكثير من التطبيقات الاقتصادية والتجارية على إيجاد نقط النهاية العظمى والصغرى للدوال التى تمثل هذه التطبيقات فعلى سبيل المثال، نحن نبحث دائماً عن حجم الإنتاج الذى يحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. وبصفة عامة، إذا كان لدينا الدالة د (س) وأردنا تحديد نقط النهاية العظمى والصغرى لهذه الدالة فإنه يوجد لذلك طريقتين هما :

أولاً : اختبار المشتقة الأولى :

وسوف نتعرف على خطوات هذا الاختبار من خلال المثال الرقمى التالى:

مثال (٢٧) :

أوجد النهاية الصغرى للدالة :

ص = س^{٢} − ٢ س

الحل :

تتلخص طريقة إيجاد النهاية الصغرى للدالة فى الخطوات الآتية :

١- نوجد المشتقة الأولى للدالة :

ص' = ٢ س − ٢

٢- نضع ص' = صفر

٢ س − ٢ = صفر

٢ (س − ١) = صفر

س = ١

٣- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س < ١ ، أى عندما س = ٠,٩٩ مثلا

ص' = ٢ (٠,٩٩) − ٢

= ١,٩٨ − ٢

= −٠,٢ (قيمة سالبة)

٤- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س > ١ ، أى عندما س = ١,٠١ مثلا

ص' = ٢ (١,٠١) − ٢

= ٢,٠٢ − ٢ = ٠,٠٢ (قيمة موجبة)

وحيث أن المشتقة الأولى تتغير من سالب إلى موجب فإنه يوجد للدالة نهاية صغرى عند النقطة س = ١

ولإيجاد قيمة هذه النهاية يتم التعويض فى الدالة الأصلية

ص = س^{٢} − ٢ س

= (١)^{٢} − ٢ (١)

= ١ − ٢ = −١

مثال (٢٨) :

أوجد نقطة النهاية العظمى للدالة :

$$ص = ٥ س - س^{٢}$$

الحل :

١- نوجد المشتقة الأولى للدالة :

ص' = ٥ - ٢ س

٢- نضع المشتقة الأولى = صفر ونوجد قيمة س

٥ - ٢ س = صفر

٥ = ٢ س

س = ٢,٥

٣- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س < ٢,٥ ، أى عندما س = ٢,٤٩ مثلا

ص' = ٥ - ٢ (٢,٤٩)

= ٥ - ٤,٩٨

= ٠,٠٢ (قيمة موجبة)

٤- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س > ٢,٥ ، أى عندما س = ٢,٥١ مثلا

ص' = ٥ - ٢ (٢,٥١)

= ٥ - ٥,٠٢

= -٠,٠٢ (قيمة سالبة)

وحيث أن إشارة ص' تتغير من موجب إلى سالب فإنه يوجد نهاية عظمى للدالة عند النقطة س = ٢,٥ .

ولإيجاد قيمة هذه النهاية العظمى يتم التعويض فى الدالة الأصلية.

ص = ٥ (٢,٥) − (٢,٥)^{٢}

= ١٢,٥٠ − ٦,٢٥ = ٦,٢٥

مثال (٢٩) :

أوجد نقطة النهاية العظمى والصغرى للدالة :

د (س) = س^{٣} − ٣ س + ٤

الحل :

١− نوجد المشتقة الأولى للدالة :

د' (س) = ٣ س^{٢} − ٣

٢− نضع د' (س) = صفر

٣ س^{٢} − ٣ = صفر

٣ (س^{٢} − ١) = صفر

٣− (س − ١) (س + ١) = صفر

س = ١ أو س = −١

عندما س = ١

٣− نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س < ١ أى عندما س = ٠,٩٩ مثلاً.

د' (٠,٩٩) = ٣ (٠,٩٩)^{٢} − ٣

= ٢,٩٤ − ٣ = − ٠,٠٦ (قيمة سالبة)

٤- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س > ١ أى عندما س = ١,٠١ مثلا

د' (١,٠١) = ٣ (١,٠١)^{٢} - ٣

= ٣,٠٦ - ٣ = ٠,٠٦ **(قيمة موجبة)**

وحيث أن إشارة المشتقة الأولى تتغير من سالب إلى موجب فإنه يوجد نهاية صغرى عند س = ١

وهذه النهاية يتم الحصول على قيمتها بالتعويض فى الدالة الأصلية كالتالى :

د (١) = (١)^{٣} - ٣ (١) + ٤

= ١ - ٣ + ٤ = ٢

عندما س = -١

٣- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س < -١، أى عندما س = -١,٠١ مثلاً.

د (-١,٠١) = ٣ (-١,٠١)^{٢} - ٣

= ٣,٠٦ - ٣ = ٠,٠٦ **(قيمة موجبة)**

٤- نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما س > -١، أى عندما س = -٠,٩٩ مثلا

د' (-٠,٩٩) = ٣ (-٠,٩٩) - ٣

= ٢,٩٤ - ٣ = -٠,٠٦ **(قيمة سالبة)**

وحيث أن إشارة المشتقة الأولى تتغير من موجب إلى سالب فإنه يوجد للدالة نهاية عظمى عند النقطة س = -١ ولإيجاد قيمة هذه النهاية العظمى يتم التعويض فى الدالة الأصلية كالآتى :

$$د\,(-١) \quad = (-١)^{٣} - ٣\,(-١) + ٤$$
$$= -١ + ٣ + ٤ = ٦$$

ثانياً : اختبار المشتقة الثانية :

ويتلخص هذا الاختبار فى الخطوات الآتية :

١- نوجد المشتقة الأولى للدالة.

٢- نضع المشتقة الأولى تساوى صفر ونوجد قيمة س .

٣- نوجد المشتقة الثانية للدالة بإيجاد التفاضل مرة ثانية للمشتقة الأولى.

٤- يتم التعويض بقيمة س فى المشتقة الثانية وهنا توجد حالتان :

(أ) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة موجبة الإشارة كان للدالة نهاية صغرى عند هذه النقطة.

(ب) اما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة سالبة الإشارة، كان للدالة نهاية عظمى عند هذه النقطة.

والأمثلة التالية توضح هذا الاختبار.

مثال (٣٠) :

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة.

$$ص = س^{٣} - ٢٧\,س + ٣$$

الحل :

١- نوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$ص' = ٣\,س^{٢} - ٢٧$$

٢- نضع ص' = صفر

$$٣\,س^{٢} - ٢٧ = ٠$$

$$٣\,س^{٢} = ٢٧$$

$$س^{٢} = ٩$$

$$س = \pm ٣$$

٣- نوجد المشتقة الثانية للدالة :

$$ص'' = ٦\,س$$

٤- عندما س = ٣

$$ص'' = ٦ \times ٣ = ١٨$$ **(قيمة موجبة)**

وحيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة فإنه يوجد للدالة نهاية صغرى عند النقطة س = ٣ وهذه النهاية نحصل عليها بالتعويض فى الدالة الأصلية :

$$ص = (٣)^{٣} - ٢٧\,(٣) + ٣$$

$$= ٢٧ - ٨١ + ٣ = -٥١$$

عندما س = -٣

$$ص'' = ٦ \times -٣ = -١٨$$

وحيث أن إشارة المشتقة الثانية سالبة، فإنه يوجد للدالة نهاية عظمى عند النقطة س = -٣ وهذه النهاية نحصل عليها بالتعويض فى الدالة الأصلية.

$$ص = (-٣)^{٣} - ٢٧\,(-٣) + ٣$$

$$= -٢٧ + ٨١ + ٣$$

$$= ٥٧$$

٧-٦ تطبيقات اقتصادية وتجارية على النهايات العظمى والصغرى:

مثال (٣١) :

إذا فرضنا أن التكاليف الكلية (ت) وحجم الإنتاج (س) لمنتج معين يمكن التعبير عنها بالعلاقة :

ت = ٠,٠١ س + ٤٠٠٠٠٠ س$^{-١}$ + ٢٠٠٠٠

فأوجد حجم الإنتاج (س) الذى تكون عنده التكاليف أقل ما يمكن.

الحل :

نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف.

ت' = ٠,٠١ − ٤٠٠٠٠٠ س−٢

نضع ت' = صفر

٠,٠١ − ٤٠٠٠٠٠ س$^{-٢}$ = صفر

٤٠٠٠٠٠ س$^{-٢}$ = ٠,٠١

س$^{-٢}$ = ٠,٠٠٠٠٠٠٠٢٥

س^{٢} = ٤٠٠٠٠٠٠٠

س = $\pm$ ٢٠٠٠

وحيث أن حجم الإنتاج لا يكون سالباً. إذن س = ٢٠٠٠ وحدة

نوجد المشتقة الثانية.

ت" = ٨٠٠٠٠٠ س$^{-٣}$

وبالتعويض عن س = ٢٠٠٠ فى المشتقة الثانية نجد أنها موجبة.

ت" = ٨٠٠٠٠٠ (٢٠٠٠)$^{-٣}$

= ٨٠٠٠٠٠ ÷ $(٢٠٠٠)^{٣}$ (كمية موجبة)

أى أنه توجد نهاية صغرى عند النقطة س = ٢٠٠٠

إذن حجم الإنتاج الذى يجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن هو ٢٠٠٠ وحدة ويمكن الحصول على أقل التكاليف بالتعويض فى الدالة الأصلية.

أقل التكاليف = ٠,٠١ (٢٠٠٠) + ٤٠٠٠٠٠ $(٢٠٠٠)^{-١}$ + ٢٠٠٠٠

= ٢٠ + ٢٠٠ + ٢٠٠٠٠

= ٢٠٢٢٠ جنيهاً

مثال (٣٢) :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية بمصنع رانا هى :

ت = ٤ $س^{٢}$ – ٢٤ س + ٦٤

حيث (س) هو حجم الإنتاج.

(i) أوجد حجم الإنتاج الذى يجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

(ii) أوجد حجم الإنتاج الذى يجعل التكاليف المتوسطة أقل ما يمكن.

الحل :

(i) نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف

ت' (س) = ٨ س – ٢٤

نضع ت' (س) = صفر

٨ س – ٢٤ = صفر

٨ س = ٢٤

س = ٣

نوجد المشتقة الثانية :

$$\text{ت}''\ (\text{س}) = ٨$$

أى أن المشتقة الثانية موجبة الإشارة.

إذن أقل مستوى للتكاليف الكلية يتحقق عند مستوى إنتاج قدرة ٣ وحدات ونحصل عليه بالتعويض فى الدالة الأصلية.

$$\text{ت}\ (٣) = ٤\ (٣)^{٢} - ٢٤\ (٣) + ٦٤$$

$$= ٣٦ - ٧٢ + ٦٤$$

$$= ٢٨$$

(ii) التكاليف المتوسطة = التكاليف الكلية ÷ حجم الإنتاج

$$\bar{\text{ت}}\ (\text{س}) = (٤\ \text{س}^{٢} - ٢٤\ \text{س} + ٦٤) \div \text{س}$$

$$= ٤\ \text{س} - ٢٤ + ٦٤\ \text{س}^{-١}$$

نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف المتوسطة :

$$\bar{\text{ت}}'\ (\text{س}) = ٤ - ٦٤\ \text{س}^{-٢}$$

نضع $\bar{\text{ت}}'\ (\text{س}) = \text{صفر}$

$$٤ - ٦٤\ \text{س}^{-٢} = \text{صفر}$$

$$٤ = ٦٤\ \text{س}^{-٢}$$

$$٤\ \text{س}^{٢} = ٦٤$$

$$\text{س}^{٢} = ١٦$$

$$\text{س} = \pm ٤ \quad \text{(والسالب مرفوض)}$$

نوجد المشتقة الثانية لدالة التكاليف المتوسطة :

$$\bar{\text{ت}}''\ (\text{س}) = +\ ١٢٨\ \text{س}^{-٣}$$

$$= \frac{128}{س^3}$$

بالتعويض عن س = ٤ فى المشتقة الثانية

$$\bar{ت}'' (٤) = ١٢٨ \div ٦٤ = ٢$$

وحيث ان إشارة المشتقة الثانية لدالة التكاليف المتوسطة موجبة عندما س= ٤

إذن توجد نهاية صغرى لدالة التكاليف المتوسطة عند هذه النقطة وتكون التكلفة المتوسطة فى هذه الحالة

$$\bar{ت} (٤) = ٤ (٤) - ٢٤ + \frac{64}{4}$$

$$= ١٦ - ٢٤ + ١٦ = ٨$$

مثال (٣٣) :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية هى :

ت (س) = ٧٥ س + ٨٠٠

حيث (س) هى حجم الإنتاج (بالمئات). فإذا كان سعر بيع الوحدة (ع) يتحدد بالعلاقة : ع = ٦٠٠ − ٥ س

أوجد حجم الإنتاج الذى يتحقق عنده أكبر ربح ممكن.

الحل :

الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات

= (٦٠٠ − ٥ س) × س

= ٦٠٠ س − ٥ $س^٢$

الربح = الإيراد − التكاليف الكلية

ر = ٦٠٠ س − ٥ $س^٢$ − (٧٥ س + ٨٠٠)

= ٦٠٠ س – ٥ س^{٢} – ٧٥ س – ٨٠٠

= ٥٢٥ س – ٥ س^{٢} – ٨٠٠

نوجد المشتقة الأولى لدالة الربح :

ر' = ٥٢٥ – ١٠ س

عند أكبر ربح ممكن تكون المشتقة الأولى لدالة الربح تساوى صفراً.

٥٢٥ – ١٠ س = صفر

٥٢٥ = ١٠ س

س = ٥٢,٢

نوجد المشتقة الثانية لدالة الربح :

ر'' = – ١٠

وحيث أن إشارة دالة الربح سالبة إذن توجد نهاية عظمى لدالة الربح عند س = ٥٢,٢ وهذه النهاية العظمى تعبر عن أكبر ربح ممكن.

ولإيجاد أكبر ربح ممكن يتم التعويض فى دالة الربح الأصلية.

ر = ٥٢٥ (٥٢,٢) – ٥ (٥٢,٢)^{٢} – ٨٠٠

= ٢٧٤٠٥ – ١٣٦٢٤,٢ – ٨٠٠

= ١٢٩٨٠,٨ جنيهاً.

تمارين على الباب السابع

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

(١) ص = ٣ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س − ١

(٢) ص = ٠,١ س$^{-٢}$ + ٠,٠٠١ س$^{-١}$ − ٣

(٣) د (س) = (٣ س^{٢} + ٥)^{٩}

(٤) د (س) = لو (٥ س − ١)

(٥) ص = هـ^{٣س}

(٦) ص = لو [لو (٢ س − ١)]

(٧) ص = ص$^{٥س-١}$

(٨) ص = (٣ س − ١) (٢ س + ١)

(٩) ص = (٢ س − ١) (س − ١) (س + ١)

(١٠) ص = هـ^{س} لو س

(١١) ص = (٥ س^{٤} − ٣ س^{٢})^{٢٠}

(١٢) ص = (٣ س − ١) ÷ (س + ١)

(١٣) ص = $\frac{\text{س}^{2}}{\text{هـ}^{2\text{س}}}$

(١٤) ص = س $\sqrt{\text{س}}$ + س^{2} $\sqrt{\text{س}^{3}}$

(١٥) إذا كانت ص = ٥ ع^{٢} + ١ ، ع = س^{٢} − ٢

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

باستخدام المبادئ الأولية ، أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

(١٦) ص = س^{٢}

(١٧) ص = ٢ س^{٢} − ١

(١٨) ص = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١

باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

(١٩) ص = $\sqrt{\text{س}}$

(٢٠) ص = ٩

أوجد المعامل التفاضلى الأول للدوال الآتية :

(٢١) ص^{٣} + س^{٢} ص + س + ١٠ = ٠

(٢٢) س^{٢} ص^{٢} + ص^{٢} + س ص + ١٥ = ٠

(٢٣) ص = هـ$^{\text{٥س+٢}}$

(٢٤) ص = هـ$^{\text{−٣س٣−٢س٢+٤س}}$

(٢٥) ص = لو (س^{٦} − ٧)

(٢٦) ص = لو (س^{٤} + ٢ س^{٣} − ٢ س + ١)^{٦}

(٢٧) ص = ٣ س^{٤} + (٢ س − ١)^{٢}

(٢٨) ص = $(س + س^{-١})^{٢}$

(٢٩) ص = $\frac{(س+1)^2}{س}$

(٣٠) ص = $\frac{(3س^2+1)}{(س^2-1)}$

(٣١) ص = $(لو\ س)^{٥}$

(٣٢) ص = $س^{٢}$ لو س

(٣٣) ص = $\frac{1 + هـ^{س}}{1 - هـ^{س}}$

أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الأولى :

(٣٤) ص = $س^{٢}$ − ١٢ س − ٥

(٣٥) ص = ٢ س − $س^{٢}$ + ١

(٣٦) ص = $س^{٣}$ − ٣ س + ٣

(٣٧) ص = ٢ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س + ١

أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

(٣٨) ص = $س^{٣}$ − ٢٧ س − ٥

(٣٩) ص = $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ١

(٤٠) ص = $س^{٤}$ + ٤ $س^{٣}$ − ٨ $س^{٢}$ + ٣

(٤١) إذا كانت دالة التكاليف الكلية بمصنع الأنوار هى :

ت = ٢٠ س + ٠,٠٠١ س^{٢}

وسعر بيع الوحدة هو ٢٥ جنيهاً، فأوجد حجم الإنتاج (س) الذى يجعل الربح أكبر ما يمكن. وما مقدار هذا الربح.

(٤٢) إذا كانت تكلفة إنتاج (س) وحدة بمصنع هاجر تتحدد بالعلاقة التالية :

ت = $\frac{1}{400}$ س^{٢} + ٢ س + ٦٠٠

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج ٢٠٠ وحدة. وما هو التفسير الاقتصادى لهذه التكاليف.

(٤٣) إذا كانت دالة التكاليف لمنتج ما تتحدد بالعلاقة

ت = ٠,٠٥ س^{٢} + ٥ س + ٢٠٠

وسعر بيع الوحدة (ع) يتحدد بالعلاقة :

ع = ٣٠٠ − ٠,٨٥ س

حيث (س) يساوى عدد الوحدات المنتجة.

(i) أوجد حجم الإنتاج الذى يحقق أعظم ربح ممكن ومقدار هذا الربح.

(ii) أوجد سعر بيع الوحدة.

(٤٤) إذا كانت دالة التكاليف الكلية لمنتج ما هى :

ت = ٠,٠٥ س^{٢} + ٥ س + ٤٠٠

حيث (س) هى حجم الإنتاج.

أوجد حجم الإنتاج الذى يجعل التكاليف المتوسطة أقل ما يمكن.

(٤٥) أوجد الميل الحدى للاستهلاك والميل الحدى للادخار عند مستوى دخل ١٥٠ جنيهاً إذا كانت دالة الاستهلاك هى :

ك = ٢ + $\sqrt{خ}$